MATH204

Série 1 : Matrices, systèmes linéaires (3 séances).

Séance 1 : ex1 (2 premières sommes, 5 premiers produits), ex3, ex7, ex14, ex15

Séance 2 : ex5, ex6, ex8, ex16, ex18 (1,3).

Séance 3 : ex9, ex12, ex17, ex18 (2,4). Les exercices ex1 (fin), ex2, ex4, ex10, ex11 et ex13 seront donnés en correction écrite. Il est toutefois recommandé de les chercher, pour la plupart.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer, quand c'est possible, les matrices suivantes :

1. $2A - 4B$, $B + 3D$, $C - 3E$, $-D + F$, $F - \frac{1}{2}G$,
2. AB, BA, AD, DA, D^2, FD, DF, G^2, GH, HG, JK, KJ.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices suivantes :
AB, BA, CD, DC, D^2.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $B = A + 4I$.
2. Trouver une relation simple reliant B et B^2.
3. En déduire une relation reliant A, A^2 et I.
4. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3.
2. Calculer $A^6 - 8A^4 + A^3 - 9A + I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Trouver X et Y vérifiant
$2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$ et $-X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Exercice 6

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$.

Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, on note ${}^tX$ la transposée de la matrice X.
Calculer $AX, {}^tXAX$ et ${}^tXA$.

Exercice 8

1. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, puis en déduire N^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $M = I + N$ et en déduire M^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Utiliser la même méthode pour calculer $M(a,b)^n$, où $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
2. S'inspirer de ce qui précède pour calculer $M(a,b)^n$, où $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Dans une entreprise, le salaire mensuel des employés est de 7 040 F, celui des techniciens le double et celui des cadres 21 120 F. La masse salariale mensuelle de cette entreprise s'élève à 380 160 F, pour un salaire mensuel moyen de 8 640 F.

Pour des raisons économiques, la direction doit diminuer la masse salariale de 2%. cette diminution se répartit alors de la façon suivante : une baisse de 1% sur le salaire des employés, de 3% sur celui des techniciens et de 6% sur celui des cadres.

On désigne par a le nombre d'employés, b le nombre de techniciens et c le nombre de cadres.

1. Traduisez les données précédentes par 3 égalités vérifiées par les entiers a, b et c.
2. Sachant que le triplet (a,b,c) est solution du système suivant, d'inconnues X, Y, Z,

$$\begin{cases} X + Y + Z = 44 \\ X + 2Y + 3Z = 54 \\ X + 6Y + 18Z = 108 \end{cases}$$

   Résolvez ce système et deduisez-en l'effectif de chaque catégorie de salariés.

Exercice 10

Montrer qu'une matrice carrée d'ordre n peut s'écrire de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, toutes deux d'ordre n.

Préciser ces deux matrices en fonction de la matrice initiale et appliquer à la matrice :
$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P(X) = X^3 - 4X^2 + 2X - 17$.

1. Vérifier que la matrice A annule le polynôme P.
2. En déduire que la matrice A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 12

Soit A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A = I + N$, avec $N^3 = O$. En déduire les puissances entières naturelles de A.

Montrera que $(I+N)(I-N+N^2) = I - N^3$ et en déduire une expression de A^{-1} en fonction de I, N et N^2. Déterminer les puissances de A^{-1}.

Montrer que $B = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En déduire les puissances entières naturelles de B.

Peut-on calculer B^{-1} et ses puissances ?

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^p, $p \in \mathbb{N}$, et $(I - A)^{-1}$.

Exercice 14

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -x - \dfrac{1}{2}y = 5 \\ x + y - 7z = 8 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 4x + 2y - 2z = 8 \\ x + 5y - 7z = 8 \end{cases}$$

Exercice 15

Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre réel m :

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = -1 \\ 3x - (m+5)y + mz = 1 - m \\ x - 2y - z = -m \end{cases}.$$

Exercice 16

Résoudre :

$$\begin{cases} x + by = 1 \\ ax + by = 1 \\ x + aby = b \end{cases}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}$$

Exercice 17

Résoudre :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ ay + bz = 2 \\ cz = d \end{cases}.$$

où a, b, c et d, sont des paramètres réels.

Exercice 18

Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *2* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *3* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, *4* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.