Mathématiques M1

Série 1

Ex 1 - La droite n'étant pas verticale (...), on a l'équation $y = ax + b$ avec a et b à déterminer. Comme A et B appartiennent à la droite, on a le système

$$\begin{cases} 1 = -a + b \\ 5 = a + b \end{cases}$$

Par conséquent, $b = 3$ et $a = 2$, donc l'équation est $y = 2x + 3$.

La droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$ est déterminée par les points (x, y) vérifiant le système

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

donc l'équation $5y = 3x + 1$. Ainsi le point d'intersection des deux droites Ω de coordonnées (x, y) vérifie le système

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5y = 3x + 1 \end{cases}$$

On résout, et on trouve $\Omega = (-2, -1)$

Ex 2 - Si l'on remarque que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$, on a tout de suite que l'aire du triangle (ABC) vaut $BA.BC/2 = 5/2$.

Sinon, on peut plonger le plan dans l'espace (par exemple, tous les points (x,y) deviennent (x,y,0), et écrire que :

$$Aire = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||/2 = ||\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}||/2 = ||\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}||/2 = 5/2$$

On remarque alors que l'on a fait le calcul de la formule : $|det(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})|/2$.

Ex 3 - Nous pouvons supposer, quitte à changer de repère (orthonormé), que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (a, b)$, avec $b \neq 0$ car ABC n'est pas plat. La médiatrice M_1 de $[AC]$ est normale au vecteur $\overrightarrow{AC}$ et passe par $I_B = (a/2, b/2)$ milieu de $[AC]$, donc $M = (x, y)$ appartient à la médiatrice de $[AC]$ ssi $\overrightarrow{I_BM}.\overrightarrow{AC} = 0$, soit

$$M_1 : y = -ax/b + a^2/(2b) + b/2$$

La médiatrice M_2 de $[BC]$ est normale au vecteur $\overrightarrow{BC}$ et passe par le point $I_A = ((a+1)/2, b/2)$ milieu de $[BC]$, donc $M = (x, y)$ appartient à la médiatrice de $[BC]$ ssi $\overrightarrow{I_AM}.\overrightarrow{BC} = 0$, soit

$$M_1 : y = (1 - a)x/b + (a^2 - 1)/(2b) + b/2$$

La médiatrice M_3 de $[AB]$ est elle verticale car normale à (AB), et passe par $(1/2, 0)$ milieu de $[AB]$, donc

$$M_3 : x = 1/2$$

L'intersection H de M_1 et M_2 est donnée en résolvant le système à deux équations et deux inconnues donné par les équations de M_1 et M_2. On trouve que l'abscisse de H est $x_H = 1/2$, donc H appartient à M_3 et les trois médiatrices sont concourantes.

Ex 3 bis - Nous pouvons supposer, quitte à changer de repère (orthonormé), que $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ et $C = (a,b)$, avec $b \neq 0$ car ABC n'est pas plat. La médiane D_1 qui passe par C passe donc par $(1/2, 0)$, milieu de $[AB]$. La médiane D_2 qui passe par A passe par $((a+1)/2, b/2)$, milieu de $[BC]$. Enfin, la médiane D_3 qui passe par B passe par $(a/2, b/2)$, milieu de $[AC]$. On recherche les équations des D_i $(1 \leq i \leq 3)$, on trouve :

$$\begin{array}{lcl} D_1 & : & x = ay/b + 1/2 \ (b \neq 0) \\ D_2 & : & x = (a+1)y/b \\ D_3 & : & x = (a-1)y/b + 1 \end{array}$$

Soit $P = (x,y)$ l'intersection de D_1 et de D_2, alors $P = ((a+1)/2, b/2)$ (on résout le système à deux équations et deux inconnues D_1, D_2). On voit alors que P appartient à D_3 (on remplace les coordonnées de P dans l'équation de D_3. Par conséquent, les trois médianes sont concourantes.

Ex 4 - Nous pouvons supposer, quitte à changer de repère (orthonormé), que $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ et $C = (x,y)$, avec $y \neq 0$ car ABC n'est pas plat. La hauteur H_1 qui passe par B est normale au vecteur $\overrightarrow{AC} = (a,b)$, donc $M = (x,y)$ appartient à H_1 si et seulement si $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}$, donc l'équation de H_1 est

$$H_1 : y = a/b.(1-x)$$

La hauteur H_2 qui passe par A est normale au vecteur $\overrightarrow{BC} = (a-1, b)$, donc

$$H_2 : y = (1-a)x/b$$

Le point d'intersection H de H_1 et H_2 est alors de coordonnées $(a, a(1-a)/b)$. Or, la hauteur H_3 qui passe par C est d'équation

$$H_3 : x = a$$

Car la hauteur est verticale (perpendiculaire à (AB)). Par conséquent, on voit que H appartient à H_3 et que les trois hauteurs sont concourantes.

Ex 5 - 1) • Equation générale : $y = ax + b$ (la droite n'est pas verticale). La droite passe par A et B, donc on a le sytème :

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 = 3a + b \\ 1 = -2a + b \end{array} \right.$$

d'où $5a = 4$ puis $a = 4/5$ et $b = 13/5$.
Ainsi l'équation de la droite est $y = 4/5.x + 13/5$, soit

$$4x - 5y + 13 = 0$$

• Soit $M = (x,y)$ appartenant à la droite. Alors $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$, donc

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $4(x-3) - 1(y-5) = 0$, et l'équation recherchée est $4x - y - 7 = 0$.

• la droite est donnée par $\{(x,y) = B + t\vec{u}; t \in \mathbb{R}\}$ soit :

$$x = -2 + 4t$$
$$y = 1 - t$$

Puis $x = -2 + 4(1 - y) = 2 - 4y$.

On a également : $\vec{v} = (1, 4)$ est un vecteur normal à $\vec{u}$, et donc $M = (x, y)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{BM}.\vec{u} = 0$, donc

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Soit $x + 2 + 4(y - 1) = 0$, et on retrouve l'équation.

2) Cherchons un vecteur normal à la droite (AB), soit au vecteur $\overrightarrow{BA} = (5, 4)$. Ses coordonnées (x, y) doivent vérifier $5x+4y = 0$. Par exemple $\vec{v} = (4, -5)$ convient. Cherchons le point C' qui est sur la droite dirigée par $\vec{v}$ et passant par C'. Celà revient à charcher $t \in \mathbb{R}$ tel que $C' = C + t\vec{v} \in (AB)$, soit

$$5(1 - 5t) - 4(1 + 4t) = 13$$

On trouve $t = -12/41$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{CC'} = t\vec{v}$, et la distance recherchée est la norme de $t\vec{v}$ soit :

$$|t|.||\vec{v}|| = 12/41.\sqrt{4^2 + (-5)^2} = 12/41.\sqrt{41} = 12/\sqrt{41}$$

On a également, avec la formule du cours :

$$d(C, (AB)) = (4 * 1 - 5 * 1 + 13)/\sqrt{4^2 + (-5)^2} = 12/\sqrt{41}$$

3) Avec la longueur précédente, on peut facilement trouver l'aire du triangle : $base * hauteur/2 = AB * d(C, (AB))/2 = \sqrt{41} * (12/\sqrt{41})/2 = 6$

4) On sait que

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB.CA.\cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$$

et

$$det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = CB.CA.\sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$$

Alors en notant $\alpha = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$,

$$\cos(\alpha) = -1/\sqrt{(5)} \qquad \sin(\alpha) = -2/\sqrt{(5)}$$

ainsi $tan(\alpha) = 2$. Or $tan^{-1}(x) = arctan(x)$ donne la mesure d'un angle modulo π ($arctan(tan\theta) = \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), et une valeur dans $[-\pi/2, \pi/2]$. l'angle recherché vérifiant $\cos(\alpha) < 0$ et $\sin(\alpha) < 0$, il se trouve dans $[\pi, 3\pi/2]$, et donc il nous faut ajouter ici π à la valeur trouvée. Ainsi la mesure de l'angle (orienté) α est $arctan(2) + \pi \simeq 4,2487$.
Rappel : $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Ex 6 - On sait que $S = base * hauteur/2$. Donc $2S = base.hauteur = a.(b. \sin\gamma)$. Par conséquent, en multipliant par c, nous obtenons $abc = 2Sc/\sin\gamma$. Par permutation, nous obtenons les autres égalités du même type. Avec la propriété des angles inscrits dans un cercle, nous obtenons que $\sin\alpha = a/(2R)$, et donc toutes les égalités sont vérifiées.

Ex 7 - Il suffit d'utiliser la règle de Chasles, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}$. Ensuite on utilise le fait que $IA = IB = AB/2$.

Ex 8 - On sait que $b.c.\cos(\alpha) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Nous cherchons donc à prouver que $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, donc

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2.\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$$

D'où le résultat, puisque $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Ex 9 - G étant centre de gravité de ABC, on a :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$$

G' étant centre de gravité de $A'B'C'$, on a :

$$\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 0$$

Ainsi, avec la règle de Chasles :
$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$
$= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'})$
$= 3\overrightarrow{GG'}$

Ex 10 - Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, alors

$$4\vec{u}.\vec{v} = 4(ac + bd)$$

et

$$\begin{aligned}
||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 &= ||(a + c, b + d)||^2 - ||(a - c, b - d)||^2 \\
&= (a + c)^2 + (b + d)^2 - ((a - c)^2 + (b - d)^2) \\
&= a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd \\
&\quad -(a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd) \\
&= 4ac + 4bd
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité

Ex 11 - Cherchons une équation de la droite (AB). Elle est donnée par $\{(x, y, z) = A + t\overrightarrow{AB}; t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) = (1 - t, t, 1)\}$, soit par le système d'équations :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 \end{cases}$$

Cherchons maintenant un point C tel que $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ et $C \in (AB)$. Posons $C = (u, v, w)$ (on remarque que $\overrightarrow{OC} = (u, v, w)$). Alors, en sachant que $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$:

$$\begin{cases} -u + v = 0 \\ v = 1 - u \\ w = 1 \end{cases}$$

D'où $C = (1/2, 1/2, 1)$, et $d(O, (AB)) = ||(1/2, 1/2, 1)|| = \sqrt{3/2}$

Ex 12 - Théorème de la perpendiculaire commune : Etant donées deux droites $D = (AB)$ et $D' = (CD)$ non coplanaires d'un espace affine euclidien de dimension 3 de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{u'}$, il existe un unique droite Δ à la fois orthogonale et séquente à D et D'. Elle est dirigée par $\vec{v} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{u'}$. La droite Δ est appelée perpendiculaire commune à D et D'.
Si Δ coupe D en I et D' en J, alors IJ est la distance entre D et D'.
Or $\overrightarrow{IJ}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{Delta}$ d'où :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{\vec{v}.\overrightarrow{AC}}{||\vec{v}||}.\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

Ainsi

$$IJ = \frac{(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}||}$$

Ex 13 - Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, alors
$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
$= \vec{u} \wedge \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} u_2v_1w_3 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3 \\ u_3v_2w_3 - u_3v_3w_2 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1 \\ u_1v_3w_1 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 + u_3v_3w_2 \end{pmatrix}$

et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$
$= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \wedge \vec{w}$
$= \begin{pmatrix} u_3v_1w_3 - u_1v_3w_3 - u_1v_2w_2 + u_2v_1w_2 \\ u_1v_2w_1 - u_2v_1w_1 - u_2v_3w_3 + u_3v_2w_3 \\ u_2v_3w_2 - u_3v_2w_2 - u_3v_2w_1 + u_1v_3w_1 \end{pmatrix}$

On voit qu'il n'y a aucune raison que les deux vecteurs soient égaux en général. Voir par exemple $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ et $\vec{w} = (0, 0, 1)$. Cela signifie que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Ex 14 - 1) On cherche la valeur entre 0 et π d'un angle (non orienté), donc

$$\theta = \arccos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}/(AB * AC)) = \cos^{-1}(21/\sqrt{14 * 42}) = \cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$$

2) $Aire = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||/2 = ||(7, 7, -7)||/2 = 7\sqrt{3}/2$

Ex 15 - 1) • les éléments du plan sont donnés par l'ensemble

$$\{(x, y, z) = A + t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}; (t, u) \in \mathbb{R}^2\}$$

les coordonnées des points du plan vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t + 2u \\ y = 1 + 2t - 2u \\ z = 1 - 6t - 5u \end{cases}$$

En exprimant t et u en fonction de x et y et enremplaçant dans la troisième équation, on trouve alors l'équation cartésienne du plan :

$$2z = 22x + 27y - 47$$

Autre méthode : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant directeurs, le plan passe par A et est normal au vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-22, -27, 2)$, donc les points $M = (x, y, z)$ du plan vérifient $\overrightarrow{AM}.\vec{w} = 0$, soit :

$$-22(x - 1) - 27(y - 1) + 2(z - 1) = -22x - 27y + 2z - 47 = 0$$

• ici le système est

$$\begin{cases} x = 1 + t + u \\ y = 1 + 2t + 2u \\ z = 5 + 3t - 4u \end{cases}$$

et on trouve $y = 2x - 1$ (et z est donc quelconque).

Par la deuxième méthode, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-14, 7, 0)$ et $M = (x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{DM}.\vec{w} = 0$, c'est à dire :

$$-14(x-1) + 7(y-1) + 0 = -14x + 7y + 7 = 0$$

et en divisant par 7 l'équation, on retrouve bien la même chose.

• L'ensemble des points $M = (x, y, z)$ du plan vérifient

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$$

Soit $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$, donc l'équation est $x + 2y + 3z - 6 = 0$

• Le point M milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(-1/2, 2, -2)$, et $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, -6)$. On cherche l'équation du plan qui passe par M et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. On a alors :

$$-3(x + 1/2) + 2(y-2) - 6(z+2) = 0$$

On obtient alors l'équation cartésienne du plan $4y = 6x + 12z + 35$ (on a multiplié par 2).

2) un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{w} = (-22, -27, 2)$. On cherche t tel que $H = D + t\vec{w}$ soit dans le plan. C'est à dire (voir que c'est bien ça...) :

$$-22 * 1 - 27 * 1 + 2 * 5 + ||\vec{w}||^2 t + 47 = 0 \quad \text{donc } ||\vec{w}||^2 t = -8$$

Ensuite, la distance cherchée est $||\vec{w}t|| = 8/||\vec{w}|| = 8/\sqrt{1217}$.

Autre méthode, d'après la formule du cours, c'est exactement le calcul que l'on vient de faire :

$$d(D, (ABC)) = |-22 * 1 - 27 * 1 - 2 * 5 + 47|/||\vec{w}|| = 8/\sqrt{1217}$$

3) On a la formule

$$d(D, (AB)) = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||/||\overrightarrow{AB}||$$

Faisons le calcul : $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ et $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{49}$. Alors la distance cherchée est $4.\sqrt{13/49}$.

4) On a $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}||/AB.AC)$ (c'est un angle non orienté, donc dans $[0, \pi]$ que l'on cherche).
On trouve après calcul $\alpha = \arccos(20/\sqrt{49 * 33})$, résultat laissé à la calculatrice.

5) Volume=$1/6.[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 4/3$.

Ou Volume=$1/3 * Aire(ABC) * d(D, (ABC)) = 1/6 * ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| * d(D, (ABC))$ $= 1/6 * \sqrt{1217} * 8/\sqrt{1217} = 4/3$.

Ex 16 - 1) En notant $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$, on a, compte tenu des hypothèse : $\overrightarrow{FE} = -\vec{i}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{i}$, $\overrightarrow{CB} = -\vec{j}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{i} + 1/2\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 1/2\vec{j}$, puis $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{j} + \vec{k}$. Alors :

$$\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG} = -\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{k}$$
$$\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB} = \vec{i} \wedge (-\vec{j}) = -\vec{k}$$
$$\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} = (\vec{i} - \vec{j}) \wedge \vec{i} = \vec{k}$$
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{i} \wedge (\vec{i} + 1/2\vec{j}) = 1/2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH} = (\vec{i} - \vec{j}) \wedge (\vec{j} + \vec{k}) = \overrightarrow{CE}$$

2) Soit $M = (x, y, z)$, comme $A = (0, 0, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ alors :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit : $y = z = 0$ et x est quelconque : l'ensemble des points M cherchés est la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $0 = 1$ et $z = -1$, ce qui est impossible. Donc l'ensemble des points M est vide.

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 2-3x \\ 1-3y \\ -3z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $z = 0$, et $x = 2y$: l'ensemble des points M est la droite (AI).

Ex 17 - 1) On peut utiliser les formules

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 = \vec{u}^2.\vec{v}^2.\sin^2(\vec{u}, \vec{v})$$
$$||\vec{u}.\vec{v}||^2 = \vec{u}^2.\vec{v}^2.\cos^2(\vec{u}, \vec{v})$$

Le résultat est alors immédiat.

2) et 3)On a par définition $p = 1/2.(a + b + c)$. De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c.b.\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2$ d'après Ex 1.8. Alors d'après la question 1), en sachant que $S = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||/2$, on obtient $4.S^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2/4 = c^2.b^2$, soit

$$\begin{aligned} 16.S^2 &= 4c^2.b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2cb - b^2 - c^2 + a^2)(2cb + b^2 + c^2 - a^2) \\ &= (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2) \\ &= (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a) \\ &= 16(p - b)(p - c)(p - a)p \end{aligned}$$

D'où le résultat. L'application numérique est laissée à la calculatrice.

Ex 18 - 1) Rappel : dans les coordonnées sphériques, $R \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (ou $[0, 360[$ deg) et $\varphi \in [0, \pi]$ (ou $[0, 180]$ deg). Nous travaillerons en degrés. Alors

$$\overrightarrow{OA} = (R\sin\varphi_1\cos\theta_1, R\sin\varphi_1\sin\theta_1, R\cos\varphi_1)$$

$$\overrightarrow{OB} = (R\sin\varphi_2\cos\theta_2, R\sin\varphi_2\sin\theta_2, R\cos\varphi_2)$$

Si bien que

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2(\sin\varphi_1\cos\theta_1\sin\varphi_2\cos\theta_2 + \sin\varphi_1\sin\theta_1\sin\varphi_2\sin\theta_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2)$

2) Or, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = R^2\cos\alpha$, d'où

$$\cos\alpha = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + \cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

Soit

$$\cos\alpha = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

3) Rappel : les coordonnées données sur la Terre ne sont pas les coordonnées sphériques. Il faut donc faire la "traduction" des coordonnées :

$$B = (48N, 2E) - - > (6367, 2, 90 - 48) = (6367, 2, 42)$$

$$A = (35S, 149E) - - > (6367, 149, 90 + 35) = (6367, 149, 125)$$

. On peut alors faire le calcul :

$$\cos\alpha = \sin 125 \sin 42 \cos(147) + \cos 125 \cos 42 \simeq -0,88594222$$

La distance cherchée est alors (attention, ici il faut faire le calcul en radian !)

$$\alpha * 6367 = \arccos(-0,88594222) * 6367 \simeq 2,659 * 6367 \simeq 16931,88 \text{ km}$$

Mathématiques M1

Série 2

Ex 1 - 1)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\cos(1/x^3) = 0 = f(0)$$

En effet, $\cos(1/x^3)$ est borné, et $\lim_{x\to 0, x>0}\sqrt{x} = 0$. Ainsi f est continue.

2) Si $x > 0$, alors $f(x) = 1$, et si $x < 0$, $f(x) = -1$. Ainsi, les limites à gauche et à droite de f en 0 ne sont pas égales, ce qui signifie que f n'est pas continue en zéro.

3)

$$lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} th(x^2) = th(0) = 0$$

et

$$lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\cos(1/x)}{\sin(\sqrt{x})} = 0$$

en effet, en 0, par valeurs positives, $\sin(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, alors $f(x) \sim \sqrt{x}\cos(1/x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent, les limites étant les mêmes, la fonction est continue.
On peut aussi écrire :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\sqrt{x}\cos 1/x \longrightarrow_{x\to 0^+} 0$$

Ex 2 - 1) f n'est pas continue (voir les limites en les valeurs entières).

2) g est continue (voir les limites en les valeurs entières).

3) h est continue (sommes, composées et quotients de fonctions continues).

Ex 3 - Posons $g(x) = f(x) - x$, pour $x \in [0, 1]$. Si $g(0) = 0$ ou (respectivement $g(1) = 0$), alors 0 (resp. 1) est solution. Sinon, (si $g(0) \neq O$ et $g(1) \neq 0$), du fait que $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$, nous obtenons que $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. Comme f est continue, g l'est aussi, et le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$. Nous avons donc résolu l'exercice.
Ceci n'est plus vrai si f est discontinue. On peut par exemple prendre $f(x) = 1$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 0$.

Ex 4 - Notons $a > 0$ la longueur du trajet. Alors si l'on cherche la distance sur ce trajet entre le village et le randonneur, elle est de 0 quand le randonneur est au village, et de a quand il est au refuge. Notons 0 l'heure de départ, et 1 l'heure d'arriver (1 est vu comme l'unité de temps du trajet). On peut représenter la distance parcourue par le randonneur par une fonction continue sur $[0, 1]$ du temps :
Dans le trajet village $->$ refuge, par une fonction f qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = a$.
Dans le trajet refuge $->$ village, par une fonction g qui vérifie $g(0) = a$ et $g(1) = 0$.
La question revient alors à : existe-t-il un t dans $]0, 1[$ tel que $f(t) = g(t)$?

Or, f et g sont continues, donc $f-g$ est continue, et $(f-g)(0) = -a$ et $(f-g)(1) = a$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui nous donne la solution : il existe $t \in]0,1[$ tel que $(f-g)(t) = 0$, d'où le résultat.

Ex 5 - Voir exercice 6.

Ex 6 - Soit f la fonction (continue) qui donne la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps. Alors $f(0) = 0$ et $f(1) = 20$. Chercher l'intervalle d'une demi-heure revient à chercher t $(0 \leq t \leq 1/2)$ tel que $f(t+1/2) - f(t) = 10$. Posons $h(t) = f(t+1/2) - f(t) - 10$ pour $t \in [0,1/2]$. Alors $h(0) = f(1/2) - 10$ et $h(1/2) = 20 - f(1/2) - 10 = -(f(1/2) - 10)$. Si $f(1/2) = 10$, alors la solution est donnée par $t = 0$ ou $1/2$. Sinon, le théorème des valeurs intermédiaires appliquée à h (qui est continue) nous affirme qu'il existe $t \in]0,1/2[$ tel que $h(t) = 0$, ce qui nous donne le résultat.

Comme on parle ici en minute, nous pouvons supposer que f est définie sur $[0,60]$ avec $f(60) = 20$. Ici on cherche t $(0 \leq t \leq 57)$ tel que $f(t+3) - f(t) = 1$. On pose $h(t) = f(t+3) - f(t) - 1$ pour $t \in [0,57]$. Alors $h(0) = f(3)-1$, $h(3) = f(6)-f(3)-1$, $\ldots$,$h(57) = 20 - f(57) - 1$. Par conséquent, $\sum h(3i)_{0\leq i\leq 19} = 0$ (...). Alors si pour tout $i \in [|0..19|]$ $h(3i) = 0$, tout $t = 3i$ $(i \in [|0..19|])$ convient. Sinon, il existe au moins un couple (i_1, i_2) tel que $h(3i_1) < 0$ et $h(3i_2) > 0$. Par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure qu'il existe $t \in)3i_1, 3i_2($ (non orienté) tel que $h(t) = 0$, ce qui nous donne la solution.

Ex 7 - Par le théorème des valeurs intermédiaires : Comme p et q sont strictement posififs, on a

$$\frac{p}{p+q}f(0) + \frac{q}{p+q}f(1) \in (f(0), f(1)) \text{ (non orienté)}$$

Car $\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = 1$. Or f est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous indique qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que

$$\frac{p}{p+q}f(0) + \frac{q}{p+q}f(1) = f(c)$$

D'où le résultat.

Autre méthode : Soit $g(t) = (p+q)f(t)$ pour $t \in [0,1]$. La fonction g est continue, et vérifie $g(0) = (p+q)f(0)$ et $g(1) = (p+q)f(1)$. Si $f(0) = f(1)$, alors on peut prendre $c = 0$ ou $c = 1$. Sinon, $g(0) \neq g(1)$. Supposons que $g(0) < g(1)$, i.e. puisque p et q sont strictement positifs, que $f(0) < f(1)$ (l'autre cas se traite de manière similaire).
Prouvons que $pf(0) + qf(1) \in [g(0), g(1)]$: c'est clair par l'hypothèse que nous venons de faire, grâce au fait que p et q soient positifs :

$$pf(0) + qf(0) \leq pf(0) + qf(1) \leq pf(1) + qf(1)$$

Alors le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe un $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = pf(0) + qf(1)$, soit

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(c)$$

Ex 8 - Comme f diverge vers $-\infty$ en $-\infty$, il existe A tel que pour tout $x \leq A$, $f(x) < -1$. En particulier, $f(A) < -1$. De même, comme f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe B $(B > A)$ tel que pour tout $x \geq B$, $f(x) > 1$. En particulier, $f(B) > 1$. Comme f est continue, nous pouvons utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, pour affirmer qu'il existe $t \in]A, B[$ tel que $f(t) = 0$.

Les fonctions polynomiales vérifient exactement les hypothèses précédentes. Donc tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Ex 9 - Nous supposerons toujours $h \neq 0$.

1) $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{hE(1/h)-1}{h} = E(1/h) - 1/h$. Or $E(1/h) - 1/h$ n'a pas de limite quand h tend vers 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

3) $\frac{f(h)-f(0)}{h} = 2 + \frac{h^2 \sin(h^2)+h}{2+\sqrt{|h|}} \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 2$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

4) Si $h > 0$, $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin(h) \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Si $h < 0$, $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \cos h \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Les limites étant distinctes, on en conclut que f n'est pas dérivable en 0.

5) $\frac{f(h)-f(0)}{h} = h\cos(1/h) \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Ex 10 - 1) φ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.

2) ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex 11 - Le volume du sapin de rayon de base r est $1/3.\pi r^2 50r = 50\pi/3.r^3$, et donc sa masse est volume*densité$= 0,8 * 50\pi/3 * r^3$. Si l'on considère que $0,8$ est en kg/dm^3, il faut prendre r en dm^3 pour avoir une masse en kg. La fonction qui donne le rayon (en dm) en fonction du temps (en année) est donnée par $r(t) = 0,1t$. Ainsi, la fonction qui donne la masse en fonction du temps est

$$m(t) = 0,8 * 50\pi/3 * (0,1.t)^3$$

La fonction qui donne la vitesse d'augmentation de la masse en kg/an est donnée par la dérivée de $m(t)$, soit

$$v(t) = 0,8 * 50 * \pi * 0,1 * (0,1.t)^2$$

Le sapin qui mesure 10 m a un rayon de 1/5 m soit 2 dm. Il a donc 20 ans, et la vitesse de croissance de sa masse est $v(20) \simeq 50,265$ kg/an.

Ex 12 - 1) $f'(x) = -\cos x e^{\sin x}\sin(e^{\sin x})$

2)

$$f'(x) = \frac{\cos x\cos(\sqrt{x}) + 1/2.\sin x\sin(\sqrt{x})/\sqrt{x}}{\cos^2(\sqrt{x})}$$

3)

$$f'(x) = (-3x^2\sin(x^3)ln(1+x^2) + \frac{2x\cos(x^3)}{1+x^2})(1+x^2)^{\cos(x^3)}$$

4)

$$f'(x) = 3\sqrt{\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin^2 x}}\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}$$

5)

$$f'(x) = 1/8.\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$$

6)

$$f'(x) = 1/2.\frac{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}$$

Ex 13 - L'inégalité implique que f est continue (et même uniformément continue) sur R. Mais cela ne nous est pas utile. Elle implique également que f est dérivable en tout point, et que sa dérivée est nulle en tout point. Alors f est constante.

Ex 14 - Entre les deux contrôles, la voiture a roulé sur une distance de $136-128=8$ km. Posons f la fonction qui donne la distance parcourue (en km) depuis le premier contrôle en fonction du temps (en heure). Alors $f(0)=0$ et $f(4/60)=8$. Cette fonction est dérivable, et la dérivée est la fonction v qui donne la vitesse de la voiture en fonction du temps. (On a alors $v(0)=80$ et $v(4)=88$). En appliquant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $t\in]0,4/60[$ tel que $v(t)=(4/60-0)^{-1}*(8-0)=8*60/4=120$. Donc la vitesse limite a été dépassée entre les deux ontrôles. On remarque que les vitesses initiales et finales ne nous ont pas été utiles.
Il est plus rapide de voir que la vitesse moyenne de la voiture était de $8/(4/60)=120km/H$, et donc que la vitesse limite a nécessairement été dépassée.

Ex 15 - 1) Soit $x\in]0;\pi/2[$. Soit $g(x)=2\sin x+\tan x$. D'après Taylor-Lagrange, il existe $c\in]0,x[$ tel que

$$2\sin x+\tan x-0=(x-0)*(2\cos 0+1/\cos^2 0)+x^2/2*(-2*\sin c+2\sin c/\cos^3 c)$$

Or, $c\in]0,x[\subseteq]0,\pi/2[$, donc $sinc>0$, $\cos^3 c>0$, $1-\cos^3 c>0$ et

$$-2*\sin c+2\sin c/\cos^3 c=2\sin c(1-\cos^3 c)/\cos^3 c>0$$

D'où

$$2\sin x+\tan x>3x$$

2) Soit $g(x)=\ln(1+x)$ pour $x>-1$. La fonction g est dérivable. Alors à x fixé, il existe d'après le théorème des accroissements fini un $c\in(0,x)$ (non orienté) tel que $g(x)-g(0)=x*g'(c)$. Or $g'(c)=1/(1+c)$. Or, pour $x>-1$ donné, $1/(1+x)\leq g'(c)\leq 1$ si $c\in(0,x)$. Donc on a bien :

$$\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x$$

3) Avec $g(x)=\sin x$ $(x\geq 0)$, l'égalité des des accroissements finis nous donne : il existe $c\in]0,x[$ tel que $\sin x-\sin 0=(x-0)\cos c$. Or, $\cos c$ est majoré par 1 et x est positif, donc nous obtenons

$$\sin x\leq x$$

Maintenant, utilisons la formule de Taylor-Lagrange : il existe $c\in]0,x[$ tel que $\sin x=\sin 0+x\cos 0-x^2/2\sin 0-x^3/6\cos c$, soit $\sin x=x-x^3/6\cos c$. Or, comme x est positif, et $-\cos c\geq -1$, nous obtenons

$$x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x$$

4) Soit $g(u)=u\ln(u)$ pour $u>0$. La fonction g est dérivable sur son ensemble de définition, et donc à $x>0$ fixé, elle est dérivable sur $[x,x+1]$. Le théorème des accroissements finis nous donne alors l'existence d'un $c\in]x,x+1[$ tel que
$g(x+1)-g(x)=1*g'(c)$. Or, $g'(c)=1+\ln(c)$ et comme $c\in[x,x+1]$, on a $1+\ln(x)<g'(c)<1+\ln(1+x)$. Ainsi :

$$1+ln(x)<(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x)<1+\ln(1+x)$$

soit en soustrayant par le terme central :

$$1+(1+x)\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)<0<1-x\ln(1+x)+x\ln(x)$$

i.e. en factorisant et en otant 1 :

$$-(1+x)\ln((1+x)/x) < -1 < -x\ln((1+x)/x)$$

Puis en multipliant par (-1) et en simplifiant encore dans les logarithmes :

$$x\ln(1+1/x) < 1 < (1+x)\ln(1+1/x)$$

Ex 16 - 1) En notant $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, nous obtenons pour $n > 0$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{[(n-1)/2]}2^{n-2}[(1-(-1)^n)\sin(2x) + (1+(-1)^n)\cos(2x)]$$

Où $[x]$ représente la partie entière de x.

2) Pour $n > 0$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+x)^n}$$

3) Pour $n > 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}([\Pi_{i=1}^{n}(2i-1)]x^{-(2n+1)/2} + [\Pi_{i=0}^{n-1}(2i-1)]x^{-(2n-1)/2})$$

4) Si 4 divise n (i.e. $n \equiv 0[4]$), $f^{(n)}(x) = (-4)^{n/4}e^x\cos x$

Si $n \equiv 1[4]$, $f^{(n)}(x) = (-4)^{(n-1)/4}e^x(\cos x - \sin x)$

Si $n \equiv 2[4]$, $f^{(n)}(x) = (-4)^{(n-2)/4}(-2)e^x\sin x)$

Si $n \equiv 3[4]$, $f^{(n)}(x) = (-4)^{(n-3)/4}(-2)e^x(\cos x + \sin x)$

5) Pour $n > 0$, $f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1}\frac{n!}{(1-x)^n}$

Ex 17 - Il suffit de faire une récurrence sur n et d'utiliser le théorème de Bolzano sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ tels que $f(x_i) = f(x_{i+1})$: f étant continue, le maximum est atteint en un point c_i, et f étant dérivable, la dérivée s'annule en c_i. En comptant le nombre de fois où f' s'annule, on voit que l'on peut utiliser la récurrence pour obtenir le résultat.

Mathématiques M1

Série 3

Ex 1 - 1) a) $f(x) = x^4 - 1$. Posons $t = x + 1$; Alors $x = t - 1$, et nous cherchons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(t-1)^4 - 1 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t$. Ce développement limité est $-4t + 6t^2 - 4t^3 + t^3 a(t)$. D'où en remplaçant :

$$f(x) = -4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^3 b(x)$$

Avec $lim_{x \to -1} a(x) = 0$

$$\begin{aligned} b) f(x) &= \frac{1}{(1+x)(1-x^4)} \\ &= (1 - x + x^2 - x^3 + x^3 a(x))(1 + x^4 + x^4 b(x)) \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 c(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) f(x) &= \frac{x+1}{x-2} \\ &= -1/2 \frac{x+1}{1-(x/2)} \\ &= -1/2(1+x)(1 + x/2 + 1/4x^2 + 1/8x^3 + x^3 a(x)) \\ &= -1/2(1 + 3/2x + 3/4x^2 + 3/8x^3 + x^3 b(x) \\ &= -1/2 - 3/4x - 3/8x^2 - 3/16x^3 + x^3 c(x) \end{aligned}$$

d) $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2 - x + 5}$. Soit $t = x - 1$; Alors $x = t + 1$ et on cherche le $\mathrm{DL}_2(0)$ de

$$g(t) = f(t+1) = \frac{t^2 + t}{2t^2 + 3t + 6}$$

Or, $g(t) = t * u(t)$ avec

$$u(t) = \frac{t+1}{2t^2 + 3t + 6}$$

ainsi, $g'(t) = u(t) + tu'(t)$ et $g''(t) = 2u'(t) + tu''(t)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + tg'(0) + 1/2t^2 g''(0) + t^2 a(t) \\ &= 0 + tu(0) + t^2 u'(0) + t^2 a(t) \\ &= 1/6t + 1/12t^2 + t^2 a(t) \\ f(x) &= 1/6(x-1) + 1/12(x-1)^2 + (x-1)^2 b(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) a) f(x) &= \mathrm{sh}(x) \sin(x) \\ &= (x + 1/6x^3 + x^3 a(x))(x - 1/6x^3 + x^3 b(x)) \\ &= x^2 + x^3 c(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)f(x) &= \ln(1+x)\sin(x)\\
&= (x-1/2x^2+1/3x^3+x^3a(x))(x-1/6x^3+x^3b(x))\\
&= x^2-1/2x^3+x^3c(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)f(x) &= \frac{x}{\ln(1+x)}\\
&= \frac{x}{x-1/2x^2+1/3x^3-1/4x^4+x^4a(x)}\\
&= \frac{1}{1-1/2x+1/3x^2-1/4x^3+x^3b(x)}\\
&= 1+(1/2x-1/3x^2+1/4x^3+x^3b(x))\\
&\quad +(1/2x-1/3x^2+1/4x^3+x^3b(x))^2\\
&\quad +(1/2x-1/3x^2-1/4x^3+x^3b(x))^3+x^3c(x)\\
&= 1+1/2x-1/12x^2+1/24x^3+x^3d(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d)f(x) &= \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^n\\
&= 1+\frac{n}{2}x+(\frac{n}{4}+\frac{n(n+1)}{8})x^2\\
&\quad +(\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{8}+\frac{n(n+1)(n+2)}{48})x^3+x^3a(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)a)f(x) &= \sqrt{x}\ln(x)\\
&= f(e)+f'(e)(x-e)+1/2f''(e)(x-e)^2+(x-e)^2a(x)\\
&= \sqrt{e}+\frac{3}{2\sqrt{e}}(x-e)-\frac{1}{8e^{3/2}}(x-e)^2+(x-e)^2a(x)
\end{aligned}$$

b) $f(x)=exp(\frac{x^2-4}{x+1})$. Soit $t=x-2$; Alors $x=t+2$ et on cherche le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(t)=f(t+2)=exp(t\frac{t+4}{t+3})$

$$\begin{aligned}
g(t) &= exp(t\frac{t+4}{t+3})\\
&= exp((4t+t^2)(1/3-1/9t+1/27t^2+t^2a(t)))\\
&= exp(4/3t-1/9t^2+1/27t^3+t^3b(t))\\
&= 1+(4/3t-1/9t^2+1/27t^3+t^3c(t))\\
&\quad +1/2(4/3t-1/9t^2+1/27t^3+t^3c(t))^2\\
&\quad +1/6(4/3t-1/9t^2+1/27t^3+t^3c(t))^3+t^3d(t)\\
&= 1+4/3t+7/9t^2+23/81t^3+t^3e(t)\\
f(x) &= 1+4/3(x-2)+7/9(x-2)^2+23/81(x-2)^3+(x-2)^3h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4)a)f(x) &= \ln(\frac{\sin x}{x})\\
&= \ln(1-1/6x^2+1/120x^4+x^4a(x)\\
&= (-1/6x^2+1/120x^4+x^4a(x))\\
&\quad -1/2(-1/6x^2+1/120x^4+x^4a(x))^2+x^4b(x)\\
&= -1/6x^2-1/180x^4+x^4c(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)f(x) &= \cos(\ln(\cos x)) \\
&= \cos(\ln(1-1/2x^2+1/24x^4+x^4a(x))) \\
&= \cos((-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4a(x))-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4a(x))^2+x^4b(x)) \\
&= \cos(-1/2x^2-1/12x^4+x^4c(x)) \\
&= 1-1/2(-1/2x^2-1/12x^4+x^4c(x))^2+x^4d(x) \\
&= 1-1/8x^4+x^4e(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)f(x) &= \cos(x)^{\sin x} = exp(\sin x * \ln(\cos x)) \\
&= exp(\sin x * \ln(1-1/2x^2+1/24x^4+x^5a(x))) \\
&= exp(\sin x * ((-1/2x^2+1/24x^4+x^5a(x)) \\
&\qquad\qquad -1/2(-1/2x^2+1/24x^4+x^5a(x))^2+x^5b(x))) \\
&= exp((x-1/6x^3+1/120x^5+x^5c(x))(-1/2x^2-1/12x^4+x^5d(x))) \\
&= exp(-1/2x^3+x^5e(x)) \\
&= 1-1/2x^3+x^5h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5)a)f(x) &= \arctan(e^x) \\
&= \arctan(1+x+1/2x^2+1/6x^3+x^3a(x)) \\
&= \pi/4+1/2(x+1/2x^2+1/6x^3+x^3b(x)) \\
&\quad -1/4(x+1/2x^2+1/6x^3+x^3b(x))^2 \\
&\quad +1/12(x+1/2x^2+1/6x^3+x^3b(x))^3+x^3c(x) \\
&= \pi/4+1/2x-1/12x^3+x^3d(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)f(x) &= 1/x^2-1/\arcsin^2 x \\
&= \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^2\arcsin^2 x} \\
&= \frac{1/3x^4+8/45x^6+x^7a(x)}{x^4+1/3x^6+x^7b(x)} \\
&= \frac{1/3+8/45x^2+x^3c(x)}{1+1/3x^2+x^3d(x)} \\
&= (1/3+8/45x^2+x^3c(x))(1-1/3x^2+x^3e(x)) \\
&= 1/3+1/15x^2+x^3h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6)a)f(x) &= \cos(\sqrt{x^2+5x\pi^2}) \\
&= -1+2/9(x-2\pi)^2+(x-2\pi)^2a(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)f(x) &= \arctan(2\sin x) \\
&= \pi/3+1/4(x-\pi/3)-3\sqrt{3}/16(x-\pi/3)^2 \\
&\quad +3/16(x-\pi/3)^3+(x-\pi/3)^3d(x)
\end{aligned}$$

Ex 2 - $f'(x) = 1/\sqrt{1+x^2} = 1 - 1/2x^2 + 3/8x^4 + x^4a(x)$. Alors pour f on intègre et on n'oublie pas d'ajouter $f(0)$:

$$f(x) = x - 1/6x^3 + 3/40x^5 + x^5b(x)$$

Ex 3 - $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + x^4a(x)$ et $chx = 1 + x^2/2 + x^4/24 + x^4b(x)$. Alors
pour $x < 0$, $f(x) = 1 + x/2 + x^2/24 + x^2c(x)$
pour $x \geq 0$, $f(x) = 1 + x/2 + x^2/24 + x^2d(x)$
Comme c et d ont la même limite 0 en 0, on peut écrire

$$f(x) = 1 + x/2 + x^2/24 + x^2e(x)$$

Donc f a bien un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Ex 4 - $1/(1-ax^2) = 1 + ax^2 + a^2x^4 + x^5a(x)$ et $e^{bx^2} = 1 + bx^2 + b^2x^4/2 + x^5b(x)$. De plus, $tanx = x + 1/3x^3 + x^4c(x)$, donc $tan^2x = x^2 + 2/3x^4 + x^5d(x)$. alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(a-b)x^2 + (a^2 - b^2/2)x^4 + x^5e(x)}{x^2 + 2/3x^4 + x^5d(x)} \\ &= \frac{(a-b) + (a^2 - b^2/2)x^2 + x^3e(x)}{1 + 2/3x^2 + x^3d(x)} \\ &= ((a-b) + (a^2 - b^2/2)x^2 + x^3e(x))(1 - 2/3x^2 + x^3g(x)) \\ &= (a-b) + (a^2 - b^2/2 - 2/3(a-b))x^2 + x^3h(x) \end{aligned}$$

Le développement limité de f ne contient pas de terme en x^2 si et seulement si $(a^2 - b^2/2 - 2/3(a-b)) = 0$, soit en réécrivant : $(a-1/3)^2 - 1/2(b-2/3)^2 + 1/9 = 0$. On remarque que les points qui vérifient cette équation se situent sur une hyperbole.

Ex 5 - 1) $\sin x - x = -x^3/6 + x^3a(x)$. Par conséquent, la limite recherchée est celle de $(-x + xa(x))/6$ quand x tend vers 0, donc c'est 0.
2) $\sin x - \tan x = -1/2x^3 + x^3a(x)$ et $thx - \tan x = -2/3x^3 + x^3b(x)$, par conséquent, la limite recherchée est 3/4.
3) $\ln x + 1 - x = -(x-1)^2/2 + (x-1)^2a(x)$, avec $lim_{x\to 1}a(x) = 0$ donc

$$\begin{aligned} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}} &= \frac{(-(x-1)^2 + (x-1)^2a(x))(1 + \sqrt{2x - x^2})}{2(1 - 2x + x^2)} \\ &= \frac{(-1 + a(x))(1 + \sqrt{2x - x^2})}{2} \longrightarrow_{x\to 1} -1 \end{aligned}$$

4) $lim_{x\to 0}f(x) = 1$
5) $e^{\sin x} - chx = 1 + x - 1 = x + xa(x)$ et $x\cos^2 x = x + xb(x)$, donc la limite cherchée est 1.
6)

$$\begin{aligned} 1/x - 1/\ln(1+x) &= \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)} \\ &= \frac{-x^2/2 + x^2a(x)}{x^2 + x^2b(x)} \longrightarrow_{x\to 0} -1/2 \end{aligned}$$

7) $lim_{x\to \pi/2}f(x) = -1$
8) $lim_{x\to 0^-}f(x) = 0$
9)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a(1-x^b)-b(1-x^a)}{(1-x^a)(1-x^b)} = \frac{a(1-e^{b\ln x})-b(1-e^{a\ln x})}{(1-x^a)(1-x^b)} \\
&= \frac{a(1-e^{b((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)^2c(x))})-b(1-e^{a((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)^2c(x))})}{(1-e^{a((x-1)+(x-1)d(x))})(1-e^{b((x-1)+(x-1)d(x))})} \\
&= \frac{a(-b(x-1)+\frac{b-b^2}{2}(x-1)^2+(x-1)^2\alpha(x))}{(-b(x-1)+(x-1)\gamma(x))(-a(x-1)+(x-1)\delta(x))} \\
&\quad -\frac{b((-a(x-1)+\frac{a-a^2}{2}(x-1)^2+(x-1)^2\beta(x))}{(-b(x-1)+(x-1)\gamma(x))(-a(x-1)+(x-1)\delta(x))} \\
&= \frac{\frac{a^2b-ab^2}{2}+\alpha(x)+\beta(x)}{(-b+\gamma(x))(-a+\delta(x))} \longrightarrow_{x\to 1} \frac{\frac{a^2b-ab^2}{2}}{ab} = \frac{a-b}{2}
\end{aligned}
$$

10) $lim_{x\to\pi/6} f(x) = e^{-1}$
11) $lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
12) Si $a=1$, la limite est 1. Si $b=1$ et $a<1$, la limite est 0. Si $b=1$ et $a>1$, la limite est $+\infty$. Si $b<1$, alors la limite est 1. Si $b>1$ et $a>1$, alors la limite est $+\infty$. Si $b>1$ et $a<1$, alors la limite est 0. Pour le voir, on peut écrire

$$f(x) = e^{e^{x\ln b}x\ln a}$$

et se souvenir que l'exponentielle de x "est plus forte" que n'importe quelle puissance de x.

Ex 6 -

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1+x^2/2+x^4/24+x^6/720+x^6a(x) \\
&\quad -(1+5/12x^2)(1+x^2/12+x^4/144+x^6/1728+x^6b(x)) \\
&= 1+x^2/2+x^4/24+x^6/720-(1+x^2/2+x^4/24+1/288x^6)+x^6c(x) \\
&= -1/480x^6+x^6c(x)
\end{aligned}
$$

Alors $f(x) = -1/480x^6 + x^6c(x)$, et $\frac{f(2x)}{f(x)} = frac{-}2^6+2^6c(2x)-1+c(x) \longrightarrow_{x\to 0} 2^6$

Ex 7 - Rappel : Equation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, que l'on retrouve avec le développement limité à l'ordre 1 en a.
1) $f(x) = 1+x^2-1/2x^3+x^3a(x)$. La courbe passe au dessus de sa tangente.
2) $f'(x) = x(2\ln x+1)$, d'où l'équation de la tangente : $y = 3e(x-e)+e^2 = 3ex-2e^2$. On a

$$f(x) = e^2+3e(x-e)+5/2(x-e)^2+(x-e)^2a(x)$$

Donc on observe que la tangente est sous la courbe.
3) $f(x) = e+e/2(x-1)+e/48(x-1)^3+(x-1)^3a(x)$, donc la courbe a un point d'inflexion en 1. La courbe est au dessous de sa tangente à gauche et au dessus à droite.
4) $f(x) = Argch(1+x^4) = \sqrt{2}x^2+x^2a(x)$, la courbe passe au dessus de sa tangente.

Ex 8 - Comme $\ln(1+x^2) = x^2-x^4/2+x^4a(x)$ et $sin^2x = x^2+x^4b(x)$, on a

$$\frac{\ln(1+x^2)}{sin^2x} = \frac{1-x^2/2+x^2a(x)}{1+x^2b(x)} = 1-x^2/2+x^2c(x)$$

La fonction f s'écrit alors

$$e^{1/x\ln(1-x^2/2+x^2c(x))} = e^{1/x(-x^2/2+x^2d(x))} = e^{-x/2+xd(x)}$$

. Donc f est prolongeable en en une application F qui vaut 1 en 0.
On a $F(x) = 1 - 1/6x + 1/72x^2 + x^2a(x)$, donc la courbe passe au dessus de sa tangente localement en 0. On peut remarquer cependant que 'globalement', ce n'est pas le cas (voir sur une calculatrice graphique par exemple).

Ex 9 - 1)En 0, $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^2a(t)$, alors en posant $t = 1/x$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(1 + 1/x + 1/(2x^2) + 1/x^2a(1/x)) \\ &= x + 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varphi(x) \end{aligned}$$

2) f admet donc la droite $y = x + 2$ comme asymptote en $+\infty$, et $c = \frac{3}{2}$ étant positif, on en conclut que la courbe est au dessus de cette asymptote.

$g(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$. En posant $t = 1/x$, on a

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) &= \arctan\left(\frac{t}{t+1}\right) \\ &= \arctan(t(1 - t + t^2 + t^2a(t)) \\ &= \arctan(t - t^2 + t^3 + t^3a(t)) \\ &= (t - t^2 + t^3 + t^3a(t)) - (t - t^2 + t^3 + t^3a(t))^3/3 + t^3b(t) \\ &= t - t^2 + 2/3t^3 + t^3c(t) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varphi(x)) \\ &= x - 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varphi(x) \end{aligned}$$

et la courbe admet la droite $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$, la courbe restant au dessus de son asymptote.

Mathématiques M1

Série 4

Ex 1 -

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t^2\cos t dt &= [t^2\sin t]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} t\sin t dt \\
&= (\pi/2)^2 + 2[-t\cos t]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2}\cos t dt \\
&= (\pi/2)^2 + 2[-\sin t]_0^{\pi/2} \\
&= \pi^2/4 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^2\ln x dx &= [1/3x^3\ln x]_1^2 - \int_0^2 1/3x^2 dx \\
&= 8/3\ln 2 - [1/9x^3]_1^2 \\
&= 8/3\ln 2 - 8/9 + 1/9 \\
&= 8/3\ln 2 - 7/9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{\sqrt{t}}dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2ue^u du &= [2ue^u]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2e^u du \\
&= 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - [2e^u]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e^{\sqrt{2}} + 2 \\
&= 2(e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}dt &= 2\int_1^{1/\sqrt{2}} u^4 - 1du \\
&= 2[1/5u^5 - u]_1^{1/\sqrt{2}} \\
&= 2(\frac{1}{20\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5} + 1) \\
&= \frac{32 - 19\sqrt{2}}{20}
\end{aligned}$$

Ex 2 - Si $u = \tan(t/2)$, alors $cost = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, et $dt = \frac{2}{1+u^2}du$. D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\cos t}{1+\cos t}dt &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1-u^2}{1+u^2}du \\
&= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{2}{1+u^2} - 1du \\
&= [2\arctan u - u]_0^{\tan(x/2)} \\
&= x - \tan(x/2)
\end{aligned}$$

Ex 3 - On a (vérifier, ou mieux, le trouver soi-même)

$$\frac{t+1}{t(t-1)(t+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{2}{3}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{t+2}$$

Alors

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{2}[\ln t]_2^x + \frac{2}{3}[\ln(t-1)]_2^x - \frac{1}{6}[\ln(t+2)]_2^x \\ &= -\frac{1}{2}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + \frac{5}{6}\ln 2 \end{aligned}$$

Ex 4 -

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^3 t} dt = -\int_{1/2}^{0} \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

Cherchons à réécrire $\frac{1}{(1-u^2)^2}$ de la manière indiquée (sauf que α et γ sont nuls)

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{(1-u)^2} + \frac{c}{1+u} + \frac{d}{(1+u)^2}$$

En multipliant par $(1-u)^2$ et en faisant $u = 1$, on obtient $b = 1/4$. En multipliant par $(1+u)^2$ et en faisant $u = -1$, on obtient $d = 1/4$. En faisant $u = 0$, on obtient alors $a + 1/2 + c = 1$. Or la fonction est pair, donc cela nous permet d'affirmer que $a = c$ ($f(-x) = f(x)$). Donc $a = b = c = d = 1/4$, et

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2})$$

Par suite,

$$\begin{aligned} -\int_{1/2}^{0} \frac{du}{(1-u^2)^2} &= -1/4[-\ln(1-u) + \frac{1}{1-u} + \ln(1+u) - \frac{1}{1+u}]_{1/2}^{0} \\ &= -1/4[\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + \frac{6u+2u^2}{3(1-u^2)^3}]_{1/2}^{0} \\ &= -1/4(-\ln(3) - 4/3) \\ &= 1/3 + 1/4\ln 3 \end{aligned}$$

Ex 5 - Nous cherchons :

$$\int_1^x \frac{dt}{(1+t+t^2)^2}$$

En posant $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u - \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$\int_{\pi/3}^{\arctan((2x+1)/\sqrt{3})} \frac{\sqrt{3}/2(1+\tan^2 u)}{9/16(1+tan^2 u)} du$$

Soit $\frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{\pi/3}^{\arctan((2x+1)/\sqrt{3})} \cos^2(u)du$
$= \frac{4}{3\sqrt{3}}[u + 1/2\sin(2u)]_{\pi/3}^{\arctan((2x+1)/\sqrt{3})}$
$= \frac{4}{3\sqrt{3}}[\arctan((2x+1)/\sqrt{3}) - \pi/3 + 1/2(\sin(\arctan((2x+1)/\sqrt{3}) - \sqrt{3}/2)$

Ex 6 - On développe grâce aux formules $\sin a \sin b = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ et compères pour obtenir une formule sans produit :

$$1/4(\sin(2t) - \sin(6t) + \sin(4t)$$

Alors un primitive est :

$$-1/8\cos(2t) - 1/16\cos(4t) + 1/24\cos(6t)$$

On a alors toutes les primitives en ajoutant une constante quelconque.

Ex 7 -

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin^4 t\cos^2 t \\
&= \sin^2 t(\sin t\cos t)^2 \\
&= \sin^2 t(1/2\sin(2t))^2 \\
&= \sin^2 t(1/4\sin^2(2t)) \\
&= \frac{1-\cos(2t)}{2}\frac{1-\cos(4t)}{8} \\
&= \frac{1}{16}(1-\cos 2t - \cos 4t + \cos 2t\cos 4t) \\
&= \frac{1}{16}(1-\cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}(\cos 2t + \cos 6t)) \\
&= \frac{1}{16}(1-\frac{1}{2}\cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t)
\end{aligned}$$

Alors une primitive de f est :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{16}(t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t \\
&= \frac{1}{16} - \frac{1}{64}\sin 2t - \frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{192}\sin 6t
\end{aligned}$$

Les autres primitives sont obtenues en ajoutant une constante quelconque à F.

Ex 8 - On a $ch3x - chx = chx(1+4*sh^2x)$, d'où $chx(ch3x-chx) = (1+sh^2x)(1+4*sh^2x)$. Si $t = shx$, alors $dt = chxdx$ et

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{1}{ch3x-chx}dx &= \int_{sh1}^{sht}\frac{1}{(1+x^2)4x^2}dx \\
&= 1/4\int_{sh1}^{sht}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= 1/4[-1/x - arctanx]_{sh(1)}^{sht} \\
&= 1/4(-1/sht - arctan(sht) + c_0)
\end{aligned}$$

Avec c_0 une constante (dépendant ici de $sh1$). Les primitives, sont alors $-\frac{1}{4sht} - \frac{1}{4}arctan(sht) + c$ avec c une constante quelconque.

Ex 9 - Le cercle étant paramétré par : $F(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, avec θ entre 0 et 2π, la longeur du cercle est donné par

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} ||F'(\theta)||d\theta &= \int_0^{2\pi} ||-R\sin\theta, R\cos\theta||d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2}d\theta \\
&= 2\pi R
\end{aligned}$$

Ex 10 - Nous devons calculer :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{2+x^2/2} dydx &= \int_{-2}^{2} 2+x^2/2-x^2dx\\ &= \int_{-2}^{2} 2-x^2/2dx\\ &= [2x-1/6x^3]_{-2}^{2}\\ &= 4-8/6+4-8/6=16/3\end{aligned}$$

Ex 11$^-$ **-** Que vaut $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$? Prouvons que c'est l'aire du demi-disque de centre O et de rayon 1, donc $\pi/2$. En effet, Ce demi-disque est défini par le domaine cartésien $D=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 1 \text{ et } y\geq 0\}$, donc son aire vaut :

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

Pour calculer cette aire, faisons un changement de coordonnées, et passons aux coordonnées polaires. Le demi-disque est défini par le domaine polaire Δ défini par l'ensemble $\Delta=\{(r,\theta)\,;\,r^2\leq 1 \text{ et } r\sin\theta\geq 0\}$ soit $\Delta=[0,1]\times[0,\pi]$. L'aire vaut alors :

$$\iint_\Delta rdrd\theta = \int_0^\pi\int_0^1 rdrd\theta = \int_0^\pi 1/2d\theta = \pi/2$$

Finalement :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \pi/2$$

Question supplémentaire : que vaut $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}du$ $(r>0)$? Il suffit de faire un changement de variables : $x=u/r$. Alors du est remplacé par rdx et on a :

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}du = \int_{-1}^{1}\sqrt{r^2-r^2x^2}rdx = r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = r^2\pi/2$$

Il s'agit donc de l'aire du demi-disque de rayon r et de centre O.

Ex 11 - Changeons les notations, et définissons le disque de rayon r_0, $0<r_0<R$ dans un plan de l'espace en coordonnées cylindriques passant par la droite Oz et formant un angle θ fixé avec Ox, par

$$(r-R)^2+z^2\leq r_0$$

On cherche alors le volume défini par le domaine :

$$\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}\,;\,(r-R)^2+z^2\leq r_0\}$$

Donc $-r_0\leq z\leq r_0$, et à z fixé, $R-\sqrt{r_0^2-z^2}\leq r\leq R+\sqrt{r_0^2-z^2}$. Nous cherchons donc à calculer

$\int_0^{2\pi}\int_{-r_0}^{r_0}\int_{R-\sqrt{r_0^2-z^2}}^{R+\sqrt{r_0^2-z^2}} rdrdzd\theta$
$= 2\pi\int_{-r_0}^{r_0}\int_{R-\sqrt{r_0^2-z^2}}^{R+\sqrt{r_0^2-z^2}} rdrdz$
$= \pi\int_{-r_0}^{r_0}(R+\sqrt{r_0^2-z^2})^2-(R-\sqrt{r_0^2-z^2})^2dz$
$= \pi\int_{-r_0}^{r_0}4R\sqrt{r_0^2-z^2}dz$
$= 4\pi R\int_{-r_0}^{r_0}\sqrt{r_0^2-z^2}dz$

$= 4\pi R(1/2\pi r_0^2)$ (on reconnait en effet l'aire du $1/2-$disque de rayon r_0)
$= 2\pi^2 R r_0^2$

Ex 12 - On a :

$$-a \leq x \leq a$$

à x fixé,

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

à x et y fixés,

$$-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Donc nous cherchons à calculer :
$\int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dzdydx$
Faisons le changement de variables $u = x/a$, $v = y/b$ et $w = z/c$. Alors :
$= abc \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \int_{-\sqrt{1-u^2-v^2}}^{\sqrt{1-u^2-v^2}} dwdvdu$
$= 2abc \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1-u^2-v^2} dvdu$
(on a reconnu l'aire du demi-disque de rayon $\sqrt{1-u^2}$)
$= 2abc \int_{-1}^{1} \pi/2(1-u^2)du$
$= \pi abc[u - 1/3u^3]_{-1}^{1}$
$= \frac{4}{3}\pi abc$