UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST-Mass–S2**
2004–2005

Statistique

Série n^{o} 5 – Variables aléatoires continues & approximations

Exercice 1

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Calculer à l'aide d'une table :

1. $P(X = 2)$, $P(X < 1)$, $P(X < 1,96)$, $P(X < 2)$ et $P(X < 3)$.
2. Le nombre a tel que $P(X < a) = 0,27$ et le nombre b tel que $P(X < b) = 0,59$.
3. $P(X > 1)$, $P(X > 1,96)$, $P(X > 2)$ et $P(X > 3)$.
4. Le nombre a tel que $P(X > a) = 0,27$ et le nombre b tel que $P(X > b) = 0,59$.
5. $P(X < -1)$, $P(X < -1,96)$, $P(X < -2)$ et $P(X < -3)$.
6. $P(-1 < X < 1)$, $P(-2 < X < 2)$, $P(-1,96 < X < 1,96)$ et $P(-3 < X < 3)$.
7. Le nombre c tel que : $P(|X| < z) = 0.4$.

Exercice 2

Les premiers tests d'aptitude intellectuelles ont été élaborés par A.Binet et T.Simon en 1905 pour répondre à certains besoins scolaires. Les tests ont été classés par ordre croissant de difficulté et ils ont été regroupé selon l'âge (réel) moyen auquel ils étaient réussis pour la première fois dans un groupe témoin. L'*âge mental* d'un enfant était donné par le niveau le plus élevé des tests qu'il réussissait. Ces tests ont été révisés et augmentés en 1916 (tests de Standford-Binet). On a introduit un *quotient intellectuel* (QI) défini par

$$QI := \frac{\text{âge mental}}{\text{âge réel}}$$

On a procédé ensuite à des ajustements afin que la distribution du QI suive une loi normale $\mathcal{N}(100, 16)$. Calculer

1. $P(QI < 90)$ et $P(QI > 80)$.
2. $P(80 < QI < 120)$.
3. Le nombre a tel que $P(|QI - 100| < a) = 0,90$.
4. Les quartiles Q_1 et Q_3.
5. Sharon Stone a un QI de 160, fait-elle partie des 5% des personnes au QI le plus élevé ?

Exercice 3

Dans la population française, le temps d'écoute de la télévision pendant une semaine suit une variable de loi normale dont la moyenne μ est égale à 25h et dont l'écart-type σ est égal à 6h.

1. Calculer la probabilité d'avoir un temps d'écoute compris entre 20 et 30 heures.
2. Déterminer un intervalle de confiance symétrique autour de $\mu = 25$ ayant 85% de chances de contenir le temps d'écoute.

Exercice 4

Une analyse dans un magazin a montré que le client une fois entré réalise un acte d'achat avec une probabilité de 40%. Sur 200 clients entrés dans le magazin, on note X le nombre de ceux qui ont effectivement acheté.

1. (a) Quelle est la loi de X ? Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
   (b) Calculer $P(X = 80)$.
2. On rappelle l'approximation suivante :

Soit X de loi $\mathcal{B}(n; p)$ Si $n > 30$ et $np > 5$ et $n(1-p) > 5$ alors on peut approcher X par $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$

   Peut-on approcher la loi de X par une loi normale ? Si oui, déterminer les paramètres de la loi normale Y approchant la loi de X.
3. Utiliser l'approximation par la loi Y et la correction de continuité afin de calculer $P(X < 50)$, $P(X > 100)$ et $P(X = 80)$.

Exercice 5

Dans un groupe de 100 personnes, 28 sont défavorables au passage à l'heure d'été et 72 sont favorables. On prend 5 personnes différentes parmi les 100. On note X le nombre de personnes défavorables dans le groupe des 5 sélectionnés.

1. Quelle est la loi de X. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. Calculer $P(X = 3)$.
2. Soit Y la loi $\mathcal{B}(5; 0,28)$. Calculer $P(Y = 3)$ et comparer à la question précédente.
3. Rappeler les conditions d'approximation de la loi hypergéométrique par une loi binomiale. Peut-on approcher la loi X par la loi Y ?

Exercice 6

Un nouveau-né est de sexe masculin avec une probabilité égale à 0,51. Sachant qu'il y a eu 6 647 naissances dans la région Rhône-Alpes au mois de Janvier 2001, calculer qu'il soit né plus de filles que de garçons pendant ce mois. On utilisera une approximation de la loi binomiale par la loi normale et la correction de continuité.

Exercice 7

Une étude sur 100 jours ouvrables des demandes d'essai gratuit d'un produit P a conduit aux résultats suivants. Une demande d'essai gratuit est suivie d'une commande ferme avec une probabilité de 0,12. Le nombre de demandes d'essai gratuit au cours d'un trimestre est supposé égal à 300. On appelle Y le nombre de commandes fermes durant ce trimestre.

1. Justifier la loi de Y. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ? Justifier.
3. Calculer, à l'aide de cette approximation, la probabilité d'obtenir entre 30 et 40 commandes fermes, bornes incluses. Utiliser la correction de continuité.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 40 commandes fermes pendant ce trimestre ?

Exercice 8

Un standard téléphonique redirige pendant 10 secondes au plus un appel et ce avec une probabilité de 9%. Soit X le nombre d'appels redirigés par le standard pendant une heure.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer $P(X = 40)$. Calculer $E(X)$.
2. Soit Y la loi de Poisson $\mathcal{P}(32,4)$. Calculer $P(Y = 40)$. Peut-on approcher la loi X par la loi Y ? Justifier.