UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST-Mass–S2**
2004–2005

Statistique

Série n° 6 – Echantillonnage

Exercice 1

On considère des boites de petits pois dont le poids X suit une loi normale $\mathcal{N}(200; 10)$. On désire examiner la qualité avec laquelle sont remplies les boîtes. On réalise plusieurs échantillons de taille 3, X_1, X_2 et X_3 :

x_1	x_2	x_3
206	206	181
205	218	199
199	192	194
187	207	190
193	196	200

x_1	x_2	x_3
183	187	205
198	197	199
201	186	193
180	212	213
213	190	199

1. Calculer m_3 pour chaque échantillon. On rappelle :
   $M_3 = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ est la moyenne échantillonnale théorique.
   $m_3 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ est la moyenne échantillonnale empirique.
2. Quelle est la loi de M_3 ? Calculer $E(M_3)$ et $V(M_3)$.
3. Calculer $P(197 < M_3 < 203)$.
4. Calculer un intervalle centré autour de la moyenne de M_3 ayant 95% de chances de contenir la moyenne d'un échantillon de 3 boîtes.
5. Parmi les échantillons relevés, comptez ceux dont la moyenne m_3 est comprise entre 197 et 203. Etait-ce prévisible ?

Exercice 2

Dans une filière MASS, 65% des étudiants choisissent l'option économie contre 35% en psychologie. On note P_{35} la proportion théorique des étudiants en psychologie de l'échantillon des 35 étudiants. On veut étudier la répercution de ce déséquilibre sur les groupes de TD formés d'étudiants rassemblés aléatoirement.

1. Déterminer $E(P_{35})$ et $V(P_{35})$.
2. Sur un groupe formé au hasard de 35 étudiants, quelle est la probabilité qu'il y ait plus d'étudiants de psychologie que d'économie.
3. A l'aide d'une approximation, calculer un intervalle centré autour de la moyenne $\pi = 35\%$ où la proportion d'étudiants de psychologie parmi les 35 étudiants peut se trouver avec une chance de 90%.

Exercice 3

Une usine produit des boulons bon marché avec une proportion défectueuse de $0,1$. Pour chaque boulon, on note X la variable aléatoire qui vaut 1 s'il est défectueux et 0 sinon. X sera appelée la variable aléatoire de la qualité du boulon.

1. Quelle est la loi de X ?

2. On considère un échantillon de 10 boulons. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_9, X_{10}$ les 10 variables aléatoires correspondant à la qualité du boulon.

   Soit $P_{10} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9 + X_{10}}{10}$ la variable aléatoire de la proportion théorique.

   (a) Soit $S_{10} = X_1 + X_2 + \cdots + X_9 + X_{10}$. Quelles sont toutes les valeurs possibles de S_{10} ? Justifez pourquoi S_{10} suit la loi binomiale $\mathcal{B}i(10; 0,1)$.

   (b) Quelles sont toutes les valeurs possibles de P_{10} ? Calculer $E(P_{10})$ et $V(P_{10})$.

   (c) En utilisant la relation $P_{10} = \frac{S_{10}}{10}$, calculez la probabilité que P_{10} soit comprise entre 0 et 10%.

3. Refaire (b) pour des échantillons de 100 boulons. On utilisera d'abord une approximation de la loi binomiale par la loi normale. Puis on comparera avec l'approximation donnée par le

   Théorème Central Limite *Soit X une v.a. de moyenne $E(X) = \mu$ et d'écart-type $\sigma(X) = \sigma$.*
   Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ un n-échantillon de la loi X.
   Soit $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ la moyenne échantillonnale et
   $Y_n = \frac{M_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ la moyenne échantillonnale standardisée.

   Si $n \geq 30$ alors Y_n peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

Exercice 4

Une cagette de fruits contient 100 pommes dont le poids est aléatoire. Vous savez qu'en moyenne une pomme pèse 100 grammes avec un écart-type de 20 grammes. On prélève un échantillon exhaustif de 60 pommes et on considère le poids moyen M_{60} de cet échantillon.

1. Donner $E(M_{60})$ et $V(M_{60})$.
2. Calculer $P(M_{60} < 95)$.
3. Trouver un intervalle centré autour de la moyenne $E(M_{60})$ où le poids moyen des 60 pommes a 90% de chances de se situer.