

Mathématiques pour les sciences IV

MATH407

Travaux dirigés, feuille 2

Exercice 1 Déterminer et représenter les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} ; f_2(x, y) = \ln(x^2 + y)$$

$$f_4(x, y) = \arcsin(x/y) ; f_3(x, y, z) = \ln(xyz).$$

Exercice 2 Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = x + y ; f_2(x, y) = \sqrt{xy} ;$
2. $f_3(x, y) = (1 + x + y)^2 ;$
3. $f_4(x, y) = x^2 - y^2 ; f_5(x, y, z) = x + y + z ;$
4. $f_6(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 ; f_7(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$

Exercice 3 Trouver les limites des fonctions suivantes puis étudier brièvement la continuité :

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin(1/xy) ;$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} ;$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}.$

Exercice 4 Étudier la continuité de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{pour } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{pour } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Exercice 5 Étudier la continuité de :

1. $f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} ;$
2. $f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$

Exercice 6 Etudier la continuité de :

1. Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, z) &\mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \end{aligned}$$

2. Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, \varphi) &\mapsto (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \end{aligned}$$

3. Soient V et Ω des champs de vitesse continus sur \mathbb{R}^3 . Montrer que $\Omega \wedge V$ est continu sur \mathbb{R}^3 . En déduire que si Ω dépend aussi du temps de manière C^k et si V est une application C^k vérifiant $\dot{V} = \Omega \wedge V$ alors V est de classe C^{k+1} sur son ensemble de définition.

4. Déterminer le domaine de définition de la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

avec $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. Puis étudier sa continuité.

Exercice 7 Etudier les applications linéaires suivantes puis réduire leur matrice :

- 1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z) \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + 2y + 3z, -2x - y - 2z, x + y + 2z) \end{aligned}$$

(on pourra chercher à calculer les puissances de f et g .)