Université de Savoie Année 04/05

MATH407 : Mathématiques pour les sciences IV

Travaux dirigés, feuille 3

Exercice 1 Calculer la différentielle de la fonction composée $f \circ \varphi$ dans les cas suivants :

1. $f(u,v) = u^2 e^v$ et $\varphi(t) = (\sin t, \cos t)$;
2. $f(x,y,z) = xyz$ et $\varphi(t) = (t^2+1, \ln t, \tan t)$;
3. $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$ et $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$;
4. $f(u,v) = u^2 \ln v$ et $\varphi(x,y) = (\frac{x}{y}, 3x-2y)$.

Exercice 2 On pose $z = \arctan(\frac{y}{x})$ et $y = x^2$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{dz}{dx}$.

Exercice 3 Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$;
2. $f(x,y) = (2xy+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

En déduire le développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ quand cela est possible.

Exercice 4 Calculer $d^2f(p_0)$ dans les cas suivants, puis évaluer ces différentielles en $p_0 = (1,2)$.

1. $f(x,y) = y\ln x$;
2. $f(x,y) = e^{xy}$;
3. $f(x,y,z) = xyz$ en $p_0 = (1,2,3)$.

Exercice 5 On considère $f(x,y) = 2x^3 + 3e^{2y} - 6xe^y$.

1. Montrer que f admet un unique point critique.
2. Écrire le développement limité de f à l'ordre 2 en ce point critique.

Exercice 6 Soit F une fonction de 2 variables réelles définie sur un voisinage d'un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que F est C^1, $F(a,b) = c$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Alors, on peut montrer qu'il existe $\varphi : V \to \mathbb{R}$ C^1 définie sur un voisinage V de a telle que

$$F(x,y) = c \Leftrightarrow y = \varphi(x),\ x \in V$$

pour (x,y) suffisamment voisin de 0.

1. Étudier $F(x,y) = x^2+y^2-1$ avec $c = 0$; on calculera φ' en fonction de F ; puis φ''.
2. Même question avec $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-xy$ (ici, z joue le rôle de y).

Exercice 7 Déterminer les points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x-y)^2$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 + (x-y)^2$.

Exercice 8

1. Soit g une application bilinéaire de $E \times E$ dans F. Calculer $g(x+x', y+y')$ et $g(\lambda(x,y))$ avec $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Faire le même calcul en supposant que g est une application linéaire de l'espace vectoriel $E \times E$ dans F.

Exercice 9 Soit la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Expliciter l'application bilinéaire f de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est représentée par M dans la base (u_1, u_2) où $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,-1)$. Quelle est la valeur de $f((3,4),(1,2))$?

Exercice 10 On considère la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$: $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

1. Déterminer sa forme polaire et sa matrice dans la base canonique.
2. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0\}$. Donner une base de F et la matrice de de la restriction de q à F dans cette base.
3. Même question avec $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 0, \ z = t\}$.

Exercice 11 On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, $q(u) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$.

1. Calculer la forme polaire de q puis la matrice associée dans la base canonique.
2. Donner la signature et le rang de q.
3. On pose $f(x,y,z) = q(x,y,z)$. Calculer les points critiques de f.

Exercice 12 On considère $q(u) = x^2 + y^2 + z^2 - 2axy - 2byz$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$. Étudier le rang et la signature de q en fonction de a, b.

Exercice 13 On considère la forme bilinéaire symétrique f de $\mathbb{R}^3$ définie, en posant pour chaque vecteur u et u' de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives (x,y,z) et (x',y',z') dans la base canonique, par :

$$f(u,u') = xx' + 2yy' - 2yz' - 2y'z + 3zz'.$$

1. Quels sont les vecteurs isotropes de f ?
2. Montrer que f est un produit scalaire.
3. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\}$. Construire une base orthonormée de F pour le produit scalaire f.
4. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour f.