Université de Savoie — Année 04/05

MATH407 : Mathématiques pour les sciences IV

Travaux dirigés, feuille 4 : extrema libres et liés.

Exercice 1 Étudier les extréma des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$;
2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Exercice 2 Déterminer les extréma des fonctions dans les cas suivants :

1. $f(x, y) = x + 2y + 1$ sur $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;
2. $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$ sur $\{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$;
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\{0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.

Exercice 3 Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 - y^2$.

1. Montrer que f n'admet pas d'extrémum global sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 4 Soit $f(x, y) = 2x^4 + 2y^4 + x - y$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 5 Soit $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 6 Soit $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Soit D une droite passant par $(0, 0)$. Montrer que $(0, 0)$ est minimum local de $f_{|D}$.
3. Montrer que $f(x, y) = (y - ax^2)(y - bx^2)$ où a, b sont à déterminer. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que f n'admet pas d'extrémum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 Soit $f(x, y) = x^2y^2 - xy$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 8 (Juin 02/03) Extremum local ; courbe de niveau ; plan tangent. Soit $f(x, y) = (1 + y + xy + x^2)e^y - \dfrac{1}{e}(y - x + 1)$.

1. Montrer que $(0, -1)$ est un point critique de f. La fonction f admet-elle un extrémum relatif en $(0, -1)$.
2. Soit S la surface d'équation $z = h(x, y)$ (i.e. le graphe de h) où $h(x, y) = (1 + y + xy + x^2)e^y$.
   (a) Déterminer la courbe de niveau 0 de h.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan tangent à S au point $M_0 = (0, -1, 0)$.
   (c) Donner une équation de la droite tangente à cette courbe de niveau en $(0, -1)$.
   (d) Quelle est la position locale de S par rapport à son plan tangent en M_0 ?

Exercice 9 (Juin 02/03) Extrema libres dans $\mathbb{R}^3$. Soit $f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$.

1. Montrer que f admet 2 points critiques dont l'un est l'origine O de $\mathbb{R}^3$.
2. Etudier la nature du point critique différent de l'origine.
3. En considérant $g(x) = f(x,0,0)$, déterminer la nature du point critique O.

Exercice 10 (Septembre 02/03) Extrema : étude locale. Soit $f(x,y) = (y-x^2)(y-x^4)$.

1. Montrer que $(0,0)$ est point critique de f.
2. Etudier la nature de ce point critique (*on fera un dessin de la courbe de niveau* $\{f=0\}$).

Exercice 11 (Septembre 01/02) Extrema libres. Soit $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'application f possède-t-elle un maximum absolu ? un minimum absolu ?
3. Représenter le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x+y+1 \geq 0\}$. Montrer que la restriction de f à D admet 2 extrema absolus que l'on calculera.

Exercice 12 Calculer le minimum et le maximum de :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur la droite $D = \{x+2y=1\}$;
2. $g(x,y) = 2x + y$ sur le cercle $D = \{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4\}$;
3. $h(x,y) = 2x + y$ sur le disque $D = \{(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$;
4. $i(x,y) = xy$ sur l'ellipse (pleine) $D = \{x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;
5. $j(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ sur le plan $D = \{x + 2y + z = 1\}$;
6. $k(x,y) = 2x + y + z$ sur la sphère $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
7. $l(x,y) = xyz$ sur la sphère $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 13 Soient $0 < a < b < c$. Etudier les extrema de la fonction distance $d(0,M)$ lorsque $M \in \{(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1\}$

Exercice 14

1. Calculer la distance d'un point du plan à une droite du plan.
2. Calculer la distance d'un point de l'espace à un plan de l'espace.
3. Calculer la distance d'un point de l'espace à une droite de l'espace.
4. Déterminer l'aire maximale d'un parallélogramme inscrit dans une ellipse du plan.
5. Calculer le volume maximal du parallépidède rectangle inscrit dans un ellipsoide donné.

Exercice 15 Extrema libres et liés (Juin 2002). Soit f définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, pour tout $(x,y) \in U$, par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{6}y^2 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{19}{2}.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. La fonction f admet-elle des extrema relatifs ?
3. Montrer que $f(x,y) \to -\infty$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$. En déduire que f admet un maximum global mais pas de minimum global.
4. Démontrer qu'il existe quatre points de $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 9\}$ en lesquels la restriction de f à Γ est susceptible de présenter des extrema relatifs.
5. (a) Démontrer que Γ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Démontrer que la restriction de f à Γ admet un maximum (resp. minimum) absolu M (resp. m) que l'on précisera.
   (c) En quels points de Γ, ce maximum (resp. minimum) est-il atteint ?