

Contrôle des connaissances n°1  
Mathématiques pour les sciences IV  
Math407

Vendredi 25 février 2005 (Durée : 1 heure)

IMPORTANT :

- Reporter sur la copie cachetée l'intitulé complet de l'épreuve.
- Ne pas oublier de noter sur la copie cachetée TOUS les numéros des copies intercalaires.
- Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.

**Exercice 1**

1. Rappeler la définition d'une norme.
2. Démontrer que  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2** On considère la suite  $(p_n) = (n \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n})$ . Cette suite est-elle convergente ? Si oui, vers quelle limite ? Justifier.

**Exercice 3**

1. Énoncer une caractérisation de la continuité d'une fonction.
2. Montrer que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y + 2x}{x^2 + 1} \leq 1\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Prouver que  $\{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \leq 1\} \cup \{0\}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ . Est-il borné ?

**Exercice 4** Démontrer qu'une boule fermée (dans  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme) est compacte.

**Exercice 5** Après avoir calculé et représenté le domaine de définition des fonctions suivantes, on demande de calculer la limite en  $(0, 0)$ , si elle existe.

1.  $f(x, y) = \frac{xy}{xy + y}$
2.  $g(x, y) = \frac{x^4 y^3}{x^8 + y^6}$