Chapitre 1

Le logarithme népérien

[...]

A Étude de la fonction ln

1 Croissance de ln

Théorème La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Preuve : La fonction ln étant dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $\frac{1}{x}$ toujours positive sur cet intervalle, la fonction ln est strictement croissante. □

Par conséquent, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad \ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$$

2 limites en 0 et $+\infty$

Théorème On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Preuve : Soit M un réel fixé aussi grand que l'on veut. Soit n un entier naturel vérifiant $n \ln 10 > M$. Alors pour tout $x > 10^n$ on aura, puisque ln est croissante :

$$\ln x > \ln 10^n = n \ln 10 > M$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
En posant $X = 1/x$, on a $\ln x = \ln(1/X) = -\ln X$. Quand x tend vers 0 ($x > 0$), X tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$$

□

3 Le nombre e

Nous savons que ln est continue (car dérivable) (et qu'elle est croissante). En fait, $\ln(2) \simeq 0,7 < 1$ et $\ln(3) \simeq 1,1 > 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un unique nombre dont l'image par ln est 1.

Définition On note e l'unique nombre vérifiant $\ln e = 1$
La valeur de e est environ $2,71828$

Proposition Soit m un entier relatif. L'équation $\ln x = m$ a pour unique solution e^m. De même, $\ln x \leq m \Leftrightarrow 0 < x \leq e^m$ et $\ln x \geq m \Leftrightarrow x \geq e^m$.
Preuve : On a $m = m \times 1 = m \ln e = \ln(e^m)$. Donc l'équation s'écrit $\ln x = \ln(e^m)$, ce qui est équivalent à $x = e^m$.
On raisonne de même pour les inéquations.
$\rightarrow$ **Exercice** 47p96

4 Représentation graphique

Représenter les variations de la fonction ln dans un tableau, puis le graphe, avec la valeur en e et en 1 et la tangente en 1.
$\rightarrow$ **Exercice** 64

B Limites où intervient la fonction ln

Proposition $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
Preuve : Le tracé de la fonction ln fait penser à celui de $\sqrt{x}$. En fait, prouvons que $\ln x < \sqrt{x}$. Pour cela, étudions la fonction $f : x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$ définie pour $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 4$
Tableau de variation : maximum en 4 : $f(4) < 0$ donc f est bien négative pour tout $x > 0$. Donc $\ln x < \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$. On a alors l'encadrement (pour tout $x > 0$) :

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. On a donc bien

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\square$

Proposition $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$
Preuve : Posons $X = \frac{1}{x}$. Si $x \to 0$ ($x > 0$), alors $X \to +\infty$, et

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln(\frac{1}{X}) = -\frac{1}{X} \ln(X) = -\frac{\ln X}{X}$$

D'où le résultat □

Proposition pour tout $n \geq 2$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
Preuve :

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x}$$

Comme $n - 1 > 0$, les deux termes du produit tendent vers 0, donc la limite est 0. □
→ **Exercices** 60,62,63
→ **Exercices** 83 (étude fonction)

C Variation de la fonction $\ln u$

Proposition Soit u une fonction positive définie sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln u$ a les mêmes variations que la fonction u sur l'intevalle I.
Preuve : Lorsque u est croissante, on a, pour x et y sur l'intervalle de croissance

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow u(x) \leq u(y) \\ &\Leftrightarrow \ln u(x) \leq \ln u(y) \text{ car } \ln \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Donc $\ln u$ est croissante.
Lorsque u est décroissante, on a, pour x et y sur l'intervalle de décroissance

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \\ &\Leftrightarrow \ln u(x) \geq \ln u(y) \text{ car } \ln \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Donc $\ln u$ est décroissante □

Exemple Soit $f(x) = \ln(2-x)$ définie sur $]-\infty; 2[$. La fonction $x \mapsto 2-x$ étant décroissante, on en conclut que f est également décroissante.