Chapitre 1

Les nombres complexes

[...]
→ **Exercice** 3p275

Remarque Un nombre complexe $z = a + bi$ est nul si et seulement si $a = b = 0$. Par conséquent $z = z' \Leftrightarrow z - z' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Re(z) = \Re(z') \quad \text{et} \quad \Im(z) = \Im(z')$$

Un nombre complexe z est
– réel si $\Im(z) = 0$
– imaginaire pur si $\Re(z) = 0$

A Conjugué, inverse

Définition le conjugué du nombre complexe $z = a + bi$, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $a - bi$.

Proposition Soit z un nombre complexe.

1. z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$
2. z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

Preuve : Il suffit d'utiliser la forme algébrique de z et de vérifier que l'on a les équivalences en faisant le calcul □

Remarque On a $z \times \overline{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 + b^2$ qui est un réel (positif).

Proposition Tout nombre complexe z non nul a un unique inverse noté $\frac{1}{z}$. Pour trouver son écriture algébrique (de la forme $a+bi$), il suffit de multiplier et diviser $\frac{1}{z}$ par son conjugé $\overline{z}$. On a alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

Preuve : Notons $z = a + bi$, et simplifions :

$$\frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi) \times (a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

La dernière expression est bien sous forme algébrique. □

Exemple Soit $z = 3 - 5i$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$
→ **Exercice** 26

Définition La fraction $\frac{z}{z'}$ est définie comme le produit de z par l'inverse de z'.

Ainsi, pour trouver la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$, il suffit de multiplier et de diviser par le conjugué $\overline{z'}$ de z' et de simplifier.
→ **Exercice** 27

Proposition On a les règles suivantes de calcul du conjugué d'un nombre complexe :
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$

Preuve : à faire □
→ **Exercices** 31,32,33
→ **Exercice** 37 (réel ou imaginaire pur)
→ **Approfondissement** 38p277 (ensemble des points dont l'image est réelle)

B Le plan complexe

1 Affixe d'un point

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On appelle ce plan le plan complexe.

Définition À tout nombre complexe $z = a + bi$ (a et b des nombres réels), on associe le point $M(a; b)$ (et réciproquement). le point M est le **point image** (ou l'image) de z. On dit que M est le point d'affixe z.
- Étant donné un nombre complexe z, on peut noter $M(z)$ son image.
- Étant donné un point M, on peut notrer z_M son affixe.

Faire un dessin, avec conjugué et opposé.
→ **Exercices** 5

Proposition Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même point image.

Remarque Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points. L'affixe du milieu de $[MM']$ est $\frac{z+z'}{2}$
→ **Exercice** 6 + 8,9 (si barycentre connu)
→ **Approfondissement** 10p275

2 Affixe d'un vecteur

Remarque L'affixe du point $M(x; y)$ peut être vue comme l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}(x; y)$

Définition Soit $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$ deux points du plan complexe. On définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a)$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

3 module

Soit $M(z)$ le point d'affixe $z = a + bi$. Alors la distance de O à M est $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Définition On appelle module du nombre complexe z la distance du point O au point $M(z)$. On le note $|z|$. On a donc :

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Exemple Soit $z = 3 - 5i$. Alors $|z| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Remarque Si z est un réel a, alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue).

Proposition On a les propriétés suivantes sur les modules :
- $|z| \geq 0$ pour tout z complexe et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z| = |\overline{z}|$ (dessin)
- $|\lambda z| = |\lambda| \times |z|$ (où λ est un réel quelconque)
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et donc $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Preuve : Pour le troisième point :

$$\begin{aligned} |\lambda z| &= \sqrt{\lambda z \overline{\lambda z}} \\ &= \sqrt{\lambda z \lambda \overline{z}} \\ &= \sqrt{\lambda^2 z \overline{z}} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{z\overline{z}} \\ &= |\lambda| \times |z| \end{aligned}$$

Pour le quatrième point :

$$\begin{aligned} |z \times z'| &= \sqrt{zz' \times \overline{zz'}} \\ &= \sqrt{zz' \times \overline{z}\overline{z'}} \\ &= \sqrt{z \times \overline{z} z' \overline{z'}} \\ &= \sqrt{z \times \overline{z}} \times \sqrt{z' \times \overline{z'}} \\ &= |z| \times |z'| \end{aligned}$$

Pour les autres points : en exercice. □

C Équations du second degré à coefficients réels

Proposition Soit a, b, c des réels. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a toujours des solutions dans l'ensemble des nombes complexes. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :
- Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Si $\Delta = 0$ l'équation a une unique solution réelle

$$z = \frac{-b}{2a}$$

– Si $\Delta < 0$, on remarque que $-\Delta > 0$ et donc que $\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2 = \Delta$. L'équation a alors deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Preuve : Il s'agit de revoir la preuve déjà connue, en utilisant la forme canonique de l'équation, et pour le cas où $\Delta < 0$ utiliser la remarque donnée dans l'énoncé. $\square$