# Chapitre 1

# Dérivation

[...]

▲ ce qui suit risque de gravement perturber les élèves. Dans certains cas, ceux-ci ignorent totalement cette définition et même sa signification. Parfois la seule définition donnée au nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ en $a$.
Calculer le nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$ est possible de deux manières. S'il existe, on le note $f'(a)$ et on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

→ **Exercice** 20p169
→ **Exercice** 23

## A Tangente et nombre dérivé

Soit $f$ une fonction ayant un nombre dérivé en $x_0$. Soit $M_0$ de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.
Soit $M$ un point sur la courbe d'abscisse $x$. On a donc $M(x; f(x))$.

| | | |
|---|---|---|
| Dessin qui montre que la sécante $M_0M$ s'approche de la tangente $(T)$ au fur et à mesure que $M$ s'approche de $M_0$ | ou | Dessin avec juste la tangente, et le point $M(x;y)$ quelconque sur la tangente |

Le coefficient directeur de la sécante $M_0M$ est

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Donc quand $x \to x_0$, le coefficient directeur tend vers le nombre dérivé $f'(x_0)$, et la droite sécante s'approche de la tangente. $(T)$ a donc pour coefficient directeur de nombre $f'(x_0)$.
Cela nous permet de déterminer l'équation de la tangente $(T)$.
Soit $P(x;y)$ un point de la tangente $(T)$. On a deux manières d'exprimer les coefficient directeur de $(T)$. Nous venons d'écrire que c'est $f'(x_0)$, mais c'est aussi $\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$. Donc

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

**Remarque** Connaissant la courbe de la fonction $f$, pour tracer la tangente à la courbe en $a$, il suffit de connaître le nombre nombre dérivé $f'(a)$ qui en est le coefficient directeur.
→ **Exercice** 27,29
Voir la fonction Nderiv sur calculatrice (TI) (exemple p153)

## B Fonction dérivée

Quand la fonction $f$ admet un nombre dérivé sur un intervalle $I$, on peut définir une fonction qui "dérive" de $f$ :

**Définition** La fonction $f'$ qui, à tout $x$ de l'intervalle $I$, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de $f$ en $x$, est la fonction dérivée de $f$ sur $I$.

**Remarque** Grâce à la définition en termes de coefficient directeur de tangente, pour toute fonction constante $f(x) = k$ ($k$ un réel), le coefficient directeur de la tangente étant nul en tout point, on obtient $f'(x) = 0$.
On le voit aussi simplement par le calcul du nombre dérivé :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

Ainsi :

$$f(x) = k \to f'(x) = 0 \quad \text{ou (moins correct) : } (k)' = 0$$

**Remarque** Toujours en utilisant cette définition en termes de doefficient directeur de tangente, pour la fonction $f(x) = x$, sa représentation graphique étant une droite de coefficient directeur 1, la tangente en tout point $x$ est cette même droite, donc le nombre dérivé en tout point est 1. Par conséquent,

$$f(x) = x \to f'(x) = 1 \quad \text{ou (moins correct) : } (x)' = 1$$

▲ il ne s'agit que de la dérivée de $x$, et pas de $x^2$ ou de $4x$
Nous admettrons pour la suite que pour toutes fonctions $u$ et $v$ dérivables sur un même intervalle $I$, leur somme et leur produit sont dérivables sur $I$ et on a :

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{soit pour tout } x \quad (u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$
$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{soit pour tout } x \quad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

**Exemple**
– Soit $f(x) = x + 3$. On a $f = u + v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 3$. Alors

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 1 + 0 = 1$$

– Soit $f(x) = 2x$. On a $f = uv$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x$. Alors

$$f'(x) = (u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 0 \times x + 2 \times 1 = 2$$

Ces deux dérivées admises, nous pouvons en calculer d'autres :

1. Pour $\frac{1}{u}$ : Sur le domaine où $u$ est dérivable et non nulle :
$$0 = (1)' = \left(u \times \frac{1}{u}\right)' = u'\frac{1}{u} + u\left(\frac{1}{u}\right)'$$
D'où
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
2. Pour $u^n$ ($n \geq 2$ un entier naturel) : Sur le domaine où $u$ est dérivable :
   - Pour $n = 2$, $(u^2)' = (uu)' = u'u + uu' = 2u'u$
   - Pour $n = 3$, $(u^3)' = (uu^2)' = u'u^2 + u(u^2)' = u'u^2 + u(2u'u) = 3u'u^2$
   - Pour $n = 4$, $(u^4)' = (uu^3)' = u'u^3 + u(u^3)' = u'u^3 + u(3u'u^2) = 4u'u^3$
   - ...

   En généralisant :
$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$
3. Pour $\frac{u}{v}$ : Sur le domaine où $u$ et $v$ sont dérivables et $v \neq 0$ :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\frac{1}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} - u\frac{v'}{v^2}$$
D'où
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
4. Pour $\sqrt{u}$ : Sur le domaine où $u$ est dérivable et $u > 0$ :
$$u' = \left(\sqrt{(u)}^2\right)' = (\sqrt{u})'\sqrt{u} + \sqrt{u}(\sqrt{u})' = 2\sqrt{u}(\sqrt{u})'$$
D'où
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
5. Pour $ku$ où $k$ est un réel : Sur le domaine où $u$ est dérivable :
$$(ku)' = k'u + ku' = 0u + ku'$$
D'où
$$(ku)' = ku'$$

La formule pour $(u + v)'$ permet de dériver les fonctions polynomiales.
La formule pour $\left(\frac{u}{v}\right)'$ permet de dériver les fonctions rationnelles.
$\rightarrow$ **Exercices** 37,39,44