Chapitre 1

Opérations sur les nombres relatifs

A Multiplication des nombres relatifs

1 Multiplication de deux nombres relatifs

Rappel : 3×4 c'est "3 fois 4", c'est à dire ajouter 3 fois le nombre 4 : $3 \times 4 = 4+4+4 = 12$.
On peut aussi voir $3 \times 4 = 4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.
Activité 1

Méthode Pour multiplier deux nombres relatifs

1. On détermine le signe du produit :
   – Si les deux nombres sont de même signe, le produit est positif
   – Si les deux nombres sont de signe différent, le produit est négatif
2. On multiplie leurs distances à zéro, le résultat de la multiplication est la distance à zéro du produit

Exemple

$$\left.\begin{array}{r}(-3) \times (-5) = +15 \\ (+2) \times (+3) = +6\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Produit de deux nombres de même signe :} \\ \text{le produit est positif}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}(-4) \times (+6) = -24 \\ (+7) \times (-3) = -21\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Produit de deux nombres de signes différents :} \\ \text{le produit est négatif}\end{array}$$

→ **Exercices** 24,27

Remarque La règle pour le calcul du produit est différente de celle de la somme !

$$(-2) \times (-3) = +6 \qquad \text{mais} \qquad (-2) + (-6) = -8$$

→ **Exercices** 31,34

Remarque On peut enlever les parenthèses autour du premier terme du produit s'il est négatif.

Exemple $(-7) \times (-5) = -7 \times (-5)$

Remarque On peut toujours enlever le signe + et les parenthèses autour d'un terme positif

Exemple $(-3) \times (+5) = (-3) \times 5 = -3 \times 5$

▲ $-7 \times (-5) = -(7 \times (-5))$
→ **Exercices** 29,28

▲ On n'enlève pas les parenthèses autour d'un nombre négatif s'il n'est pas à gauche du produit !

▲

$$\begin{aligned} -5^2 &= -(5^2) = -(5 \times 5) = -25 \\ (-5)^2 &= (-5) \times (-5) = 25 \end{aligned}$$

→ **Exercice** 37

2 Multiplication de plusieurs nombres relatifs

Comment faire la multiplication de plusieurs nombres relatifs ?

a Première idée :

On multiplie les deux premiers nombres entre eux. Le résultat de la multiplication de ces deux nombres les remplace alors. On continue de la même manière jusqu'à ce qu'on termine le calcul.

Exemple

$$\begin{aligned} (-5) \times (+4) \times (-2) &= ((-5) \times (+4)) \times (-2) \\ &= (-20) \times (-2) \\ &= 40 \end{aligned}$$

ProblèmeSi il y a beaucoup de facteurs, on risque de faire des erreurs de signe
Activité 4

Remarque Quand on multiplie un premier nombre par un nombre positif, le résultat a le signe du premier nombre. Pour le signe, seuls les nombres négatifs comptent.

b Deuxième idée :

On cherche d'abord le signe du résultat :

Proposition Quand on multiplie plusieurs nombres relatifs (différents de zéro) :
- Si le nombre de facteurs négatifs est pair, le produit est positif
- Si le nombre de facteurs négatifs est impair, le produit est négatif

Pour obtenir la distance à zéro du résultat, il suffit de calculer le produit des distances à zéro des nombres du produit.

Exemple $(-5) \times (+4) \times (-2)$: un nombre pair de facteurs négatifs donc le produit est positif. $(-5) \times (+4) \times (-2) = +5 \times 4 \times 2 = +40$

$$\begin{array}{rcl} (-2) \times (+3) \times (+2) \times (-5) \times (-2) & = & -2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \\ \text{trois nombres négatifs} & = & -6 \times 2 \times 5 \times 2 \\ \Rightarrow \text{ impair} & = & -12 \times 5 \times 2 \\ \Rightarrow \text{ produit négatif} & = & -60 \times 2 = -120 \end{array}$$

Remarque L'ordre dans lequel on effectue le produit n'a pas d'importance

Exemple

$$\begin{array}{rcl} (-50) \times (-47) \times (-2) & = & (-47) \times (-50) \times (-2) \\ & = & (-47) \times (+100) \\ & = & -4\ 700 \end{array}$$

→ **Exercices** 40,41,42

B Division de nombres relatifs

Rappel : La division du nombre a par le nombre b est le nombre $\frac{a}{b}$ tel que

$$\frac{a}{b} \times b = a \qquad \text{(A)}$$

Prenons a et b des nombres relatifs.

- **Si a et b ont le même signe**, il y a deux cas :
  - Si ils sont tous les deux positifs, en particulier a, le résultat du produit (A), est positif. Donc les deux facteurs du produit ont même signe. Comme b est positif, $\frac{a}{b}$ **est positif**.
  - Si ils sont tous les deux négatifs, en particulier le résultat du produit (A) est négatif. Donc les deux facteurs du produit ont des signes différents. Or b est négatif, donc $\frac{a}{b}$ **est positif**.
- **Si a et b ont des signes différents**, il y a deux cas :
  - Si a est négatif, alors les facteurs du produit (A) sont de signe différent, et b est positif, donc $\frac{a}{b}$ **est négatif**.
  - Si a est positif, alors les facteurs du produit (A) ont même signe, et b est négatif, donc $\frac{a}{b}$ **est négatif**.

Méthode Pour diviser deux nombres relatifs (le diviseur n'étant pas nul) :
- On détermine le signe avec la règle des signes de la multiplication
- on divise les distances à zéro des deux nombres

Exemple $(-6) \div (-3) = +(6 \div 3) = +2$ Les deux nombres ont même signe
$(-12) \div (+2) = -(12 \div 2) = -6$ Les deux nombres ont des signes différents
→ **Exercices** 43,44 (→ 48)

C Priorité

Proposition Si un calcul comporte des opérations entre parenthèses, on effectue d'abord ces opérations.

Exemple $(5+2)\times(-3) = 7\times(-3) = -21$

▲ $8-5\times(-4) = 8-(5\times(-4)) = 8-(-20) = 8+20 = 28$

Méthode Si un calcul ne comporte pas d'opérations entre parenthèses, on effectue en priorité les carrés, puis les multiplications et les divisions et enfin les additions et les soustractions.

Exemple

$$\begin{aligned} 3\times5-2\times3^2+7 &= 3\times5-2\times9+7 \\ &= 15-18+7 \\ &= -3+7 \\ &= 4 \end{aligned}$$

→ **Exercices** 56,62,66

D Expressions littérales

Les expressions littérales sont des expressions écrites avec des lettres (appelées variables).

Exemple $2x^2+3x-2$ est une expression littérale avec x comme variable. Des signes $\times$ sont sous-entendus : lorsque l'on écrit un nombre (ou une variable) suivi d'une variable comme dans $3x$, on sous-entend un produit : $3\times x$. La notation $2x^2$ signifie $2\times(x^2)$.
Une variable dans une expression représente n'importe quel nombre. On peut donc donner une valeur à la variable, et calculer l'expression.

Exemple Si on attribue à x la valeur -2, on remplace tous les x par 2, et on ajoute les signes $\times$ qui sont sous-entendus :

$$2\times(-2)^2+3\times(-2)-2 = 2\times4+3\times(-2)-2 = 8-6-2 = 0$$

→ **Exercices** 69,72,79
→ **Approfondissement** 83,85,87

Chapitre 2

Initiation à la démonstration

Qu'est-ce qu'une démonstration ? C'est un processus qui permet de faire des preuves. Il y a des règles bien précises qui permettent de prouver des propriétés, nous allons en voir une en particulier dans ce chapitre.
La démonstration est l'activité principale d'un mathématicien, qui cherche à se persuader et à persuader les autres que ce qu'il énonce est vrai.
Nous allons voir ici **une** méthode de démonstration particulière et nous allons l'utiliser pour faire des preuves en géométrie. Cette méthode s'appelle le *modus ponens*.

A Données, propriétés et conclusions

Les données d'un problème (ou d'un exercice) sont ce que l'on sait. Il est important de toujours reconnaître ce qui nous est donné, ce que l'on sait. On appelle aussi "hypothèses" les données.
Les propriétés sont des connaissances extérieures aux problèmes et aux exercices, qui sont toujours vraies, et permettent, à partir de ce que l'on sait, de déduire de nouvelles choses.
La liste des propriétés de géométrie que nous utiliserons cette année se trouve aux pages 266 et 267.
Quand on a déduit quelque chose à partir de ce que l'on sait et d'une propriété, ce que l'on a déduit est une nouvelle chose que l'on sait, et que l'on peut utiliser.
Eventuellement, ce que l'on a déduit est la conclusion, c'est à dire que l'on a obtenu ce que l'on voulait prouver. C'est bien sûr ce que l'on cherche à faire quand on fait une démonstration.

B Le *modus ponens*

Comment déduire quelque chose à partir ce que que l'on sait et d'une propriété ? Une méthode est le *modus ponens*.
Les propriétés de géométrie que nous utiliserons s'écrivent toutes de cette manière :

Si *(condition)*, **alors** *(conclusion)*

Une propriété nous permet d'obtenir comme nouvelle connaissance la conclusion. Pour cela il faut que la condition soit dans les données, dans ce que l'on sait.

Exemple Supposons que l'on a comme donnée (ou que l'on sache) que ABCD est un losange.

On a la propriété suivante : "**Si** un quadrilatère est un losange **Alors** ses quatre cotés sont de même longueur". La condition de la propriété correspond à la donnée (ABCD est un quadrilatère qui est un losange), on en déduit donc que les quatres cotés de ABCD sont de même longueur, c'est à dire que AB=BC=CD=DA.
Synthétiquement on peut écrire la règle de déduction de cette manière :

La donnée D et la propriété "Si D alors C" impliquent C

Cette règle s'appelle la règle du *modus ponens*.

C Chercher une démonstration

On peut chercher des démonstrations dans deux sens :

1. soit : à partir des données on utilise les propriétés pour obtenir, par des étapes successives, ce que l'on souhaite
2. soit : à partir de ce que l'on veut obtenir, on cherche les propriétés qui nous permettent d'y aboutir, en cherchant donc à obtenir les conditions des propriétés. Voir page 149.

Le second sens est souvent utilisé lorsqu'on cherche une démonstration. Mais quand on rédige une démonstration, il faut suivre le premier sens : c'est à partir des données que l'on raisonne, et on termine en déduisant ce que l'on veut prouver.

▲ Ce qu'il faut démontrer ne doit pas être utilisé comme condition d'une propriété, puisqu'on ne connait pas ce que l'on doit démontrer : il faut le démontrer... Ce qu'il faut démontrer ne peut être que la conclusion d'une propriété.
→ **Exercices** 19,20,21,22,24,26,28,30,32

Chapitre 3

Calcul littéral et réécriture

→ **Exercices** 11, 14, 16, 18

A Somme et produit de monômes

Définition Soit x une variable. On appelle monôme (en x) une expression qui s'écrit ax^n où a est un entier relatif et $n = 0, 1, 2, \dots$. On dit que ax^n est un monôme de degré n.

Exemple
- $2x^2$ est un monôme de degré 2
- $5x$ est un monôme de degré 1
- 35 est un monôme de degré 0

Proposition On peut faire la somme (ou la soustraction) de deux monômes de même degré, ce qui donne un monôme de même degré.

Exemple
- $6x^2 + 3x^2 = (6+3)x^2 = 9x^2$.
- $-4x + 12x = (-4+12)x = 8x$

Par contre on ne peux pas réécrire $12x + 5x^2$

Proposition Le produit de deux monômes est un monôme qui a pour degré la somme des degrés des deux monômes.

Exemple $(3x) \times (-5x) = 3 \times x \times (-5) \times x = -15 \times x \times x = -15x^2$.
On a multiplié deux monômes de degré 1, on a obtenu un monôme de degré 2.

Définition lorsqu'une expression utilisant des sommes et des produits de monômes est réécrite de manière à obtenir des sommes (ou soustractions) de monômes de degré tous différents, on dit que l'on a réduit l'expression. Le résultat obtenu est appelé un polynôme.

Exemple
- L'expression $6x^2 + 3x^2$ se réduit à $9x^2$
- L'expression $12x + 5x^2$ est déjà réduite.
- L'expression $5x \times (-3x)$ se réduit à $-15x^2$

→ **Exercices** 24, 25, 27, 31, 35, 38 (sommes)
→ **Exercices** 41, 43 (produits)
→ **Exercice** 47 (produit ou somme)
→ **Exercices** 51,52 (produits et sommes)

B Les distributivités

1 La distributivité simple

Rappel Quels que soient les nombres relatifs a, b et c, on a

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

Définition On appelle développer le fait de transformer un produit en somme.
→ **Exercices** 55, 58 (développement seul)
→ **Exercice** 61 (développement et réduction)
Cas particulier :

$$-(a+b) = -1 \times (a+b) = -a - b$$

$$-(a-b) = -a + b$$

→ **Exercice** 64

2 La double distributivité

Activité 7cp28 (calcul de l'air d'un rectangle de deux manières)

Proposition Quels que soient les nombres a, b, c, d, on a

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple

$$\begin{aligned}(2x+3)(4-5x) &= 2x \times 4 + (2x) \times (-5x) + 3 \times 4 + 3 \times (-5x) \\ &= 8x - 10x^2 + 12 - 15x \\ &= -10x^2 - 7x + 12\end{aligned}$$

→ **Exercices** 67, 75, 77
→ **Exercices** 80, 82, 86, 89 (problèmes)
→ **Approfondissement** 121, 129

Chapitre 4

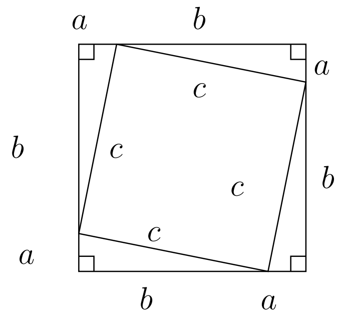
Le théorème de Pythagore

Rappels sur les triangles rectangles

Définition Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le coté opposé à l'angle droit.

Remarque L'hypoténuse est le coté le plus grand d'un triangle rectangle.
$\rightarrow$ **Exercices** 21,22,23

A Le théorème de Pythagore



Deux manières de calculer l'aire :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4\times((a\times b)\div 2)+c^2\\ &= 2\times a\times b+c^2\\ &= 2ab+c^2\end{aligned}$$

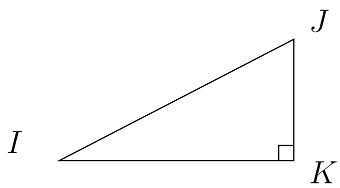
Or, en développant le terme de gauche :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a\times a+a\times b+b\times a+b\times b\\ &= a^2+ab+ba+b^2\text{or } ba=ab\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Donc
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
soit en enlevant $2ab$ des deux cotés :
$$a^2 + b^2 = c^2$$
On peut donc en déduire le théorème de Pythagore :

Théorème Soit un triangle ayant ses cotés de longueur a, b et c, avec c plus grand que a et b (données du théorème). Si le triangle est rectangle alors $a^2 + b^2 = c^2$.

Exemple



Le triangle IJK est rectangle en K, donc par le théorème de Pythagore
$$JK^2 + KI^2 = IJ^2$$
→ **Exercices** 24,26 (formule).
Le théorème de Pythagore permet de trouver des longueurs dans un triangle rectangle.
→ **Exercices** 28(hypoténuse),29(+long coté),30(coté angle droit),32
→ **Approfondissement** 45,46,51

B Contraposée du théorème de Pythagore

Plaçons-nous dans les données du théorème de Pythagore, c'est à dire prenons un triangle ayant ses cotés de longueur a, b et c, avec c plus grand que a et b. Supposons que $a^2+b^2 \neq c^2$. Peut-on avoir que le triangle est rectangle ? Non, car sinon on applique le théorème de Pythagore, et on obtient l'égalité. Donc :

Théorème Soit un triangle ayant ses cotés de longueur a, b et c, avec c plus grand que a et b (données du théorème). Si $a^2 + b^2 \neq c^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Cela s'appelle la contraposée du théorème de Pythagore.
Toute propriété de la forme Si (condition) alors (conclusion) a une contraposée. Celle-ci peut se trouver ainsi : si l'on n'a pas la conclusion de la propriété, alors on n'a pas la condition de la propriété.
Si la propriété est vraie, alors la contraposée est vraie aussi. Celle du théorème de Pythagore nous permet de prouver que des triangles ne sont pas rectangles.
→ **Exercices** 37,38

C Réciproque du théorème de Pythagore

Toute propriété de la forme si A alors B a une réciproque, il s'agit de Si B alors A.

▲ Si la propriété est vraie, ce n'est pas toujours le cas de la réciproque. Par exemple :
- Si $a > 2$ alors $a > 0$ est vraie
- Si $a > 0$ alors $a > 2$ est fausse. En effet si on prend $a = 1$ on a bien $a > 0$ mais a n'est pas supérieur à 2.

La réciproque du théorème de Pythagore est vraie (nous l'admettrons).
Ainsi donc nous pouvons écrire :

Théorème Soit un triangle ayant ses cotés de longueur a, b et c, avec c plus grand que a et b (données du théorème). Si $a^2 + b^2 = c^2$ alors le triangle est rectangle.

Cette propriété nous permet donc de prouver qu'un triangle est rectangle.
→ **Exercice** 39,41
→ **Exercice** 34 en DM
→ **Exercices** 56,42
→ **Approfondissement** 88 (donner les aires en DM ?),91

Chapitre 5

Puissances

Activité 1p126 Découverte de la raison d'une notation pour la puissance

A Puissances d'un nombre

Puissance d'un nombre positif

Définition Quel que soit le nombre a et quelque soit l'entier n supérieur à 1 :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

On définit $a^0 = 1$

Exemple $a^1 = a$; $5^2 = 5 \times 5$.
→ **Exercices** 9,10 (reconnaître la puissance éventuelle)
→ **Exercices** 13,14 (calculer des puissances de nombres (relatifs))

Produit et quotient de puissances d'un même nombre

Proposition quel que soit le nombre a et les entiers m et n,

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{m facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{m+n facteurs}} = a^{m+n}$$

Exemple $4^2 \times 4^5 = 4^{2+5} = 4^7$
→ **Exercices** 16,18

Proposition quel que soit le nombre a et les entiers m et n,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

→ **Exercice** 20

Puissance d'un nombre négatif

La propriété pour le quotient vue plus haut est vraie quelques soient les nombres m et n. Ainsi :

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$

Proposition quel que soit le nombre a et quelque soit l'entier n,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

En particulier, $a^{-1} = \frac{1}{a}$
→ **Exercices** 39,40

Opérations avec les puissances

Activité 5p127 (faire développer les produits ?)

Proposition quel que soit les nombres a et b et l'entier n,

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemple $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2$
→ **Exercices** 23,24

Méthode Règles de priorité : en l'absence de parenthèse on fait d'abord le calcul des puissances. En présence de parenthèses, on fait d'abord le calcul entre parenthèses.

Exemple $3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75 \quad (3+9)^2 = 12^2 = 144$
→ **Exercices** 31,33,35

B Puissances de 10 et notation scientifique

Activité :
$10^1 = 10$ (1 zéro)
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$ (3 zéros)
$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ (1 zéro)
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ (3 zéros)

Proposition Quel que soit l'entier n,

$$10^n = 1\ \underbrace{0\ldots0}_{\text{n zéros}} \qquad 10^{-n} = \underbrace{0,0\ldots0}_{\text{n zéros}}1$$

→ **Exercices** 41, 42, 45 (corrigé)

Puissance de puissance de 10

$(10^5)^3 = 10^5 \times 10^5 \times 10^5 = 10^{5+5+5} = 10^{5\times 3} = 10^{15}$

Proposition Quel que soit les entiers m et n,

$$(10^m)^n = 10^{m\times n}$$

→ **Exercice** 52

Produit par une puissance de 10

Activité 9p128 (avec exercices p129)

Proposition Soit n un entier positif

- Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, on déplace la virgule de n rangs vers la droite
- Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, on déplace la virgule de n rangs vers la gauche

→ **Exercices** 48,49,50

Notation scientifique

Activité 11p129

Définition Un nombre positif est écrit en notation scientifique quand il est écrit sous la forme

$$a \times 10^n$$

où

- a est un nombre décimal avec un seul chiffre (autre que 0) à gauche de la virgule
- n est un nombre entier relatif

Exemple

- $5,34 \times 10^{-7}$ et $3,87 \times 10^9$ sont écrits en notation scientifique
- $3,42 \times 2^4$; $52,125 \times 10^3$ et $0,23 \times 10^2$ ne sont pas écrits en notation scientifique

→ **Exercices** 54,55,58 (le plus difficile)

Encadrements : en DM

→ **Approfondissement** 65,78,72,73 (75 après réciproque Pythagore attention à BC^2)