Pour tout réel k, il existe un unique nombre réel dont le cube est k.
Ce nombre est appelé racine cubique de k. Il est noté $\sqrt[3]{k}$ ou aussi $k^{\frac{1}{3}}$.
On a par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ parce que $2^3 = 8$.
Au XVIème siècle, *Jérôme Cardan*, confronté à la résolution des équations du troisième degré, de la forme $x^3 = px + q$ donne la formule suivante appelée **formule de Cardan** :
lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$, l'équation a pour solution

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

1. On considère l'équation $x^3 = 1$. Quelles sont les valeurs de p et q ?
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
   Quelle solution obtient-on ?
2. On considère l'équation $x^3 = 3x + 2$. Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
   Quelle solution obtient-on ?
   Vérifier et trouver toutes les solutions de l'équation $x^3 = 3x + 2$.
3. On considère l'équation $x^3 = 2x + 4$.
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
4. On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$. Justifier que la formule de Cardan ne peut pas s'appliquer.
   On décide cependant d'appliquer la formule pour voir ce qui se passe.
   Comment peut s'écrire la *solution* ?
5. Imaginons un nombre dont le carré est -1, et qui sera très temporairement noté $\sqrt{-1}$.
   En utilisant ce nombre *imaginaire* et en effectuant des calculs 'habituels', montrer que

   $$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

   En déduire que $2 + \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 + \sqrt{-121}$.
   'Démontrer' de même que $2 - \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 - \sqrt{-121}$.
   Montrer alors que la formule de Cardan appliquée à l'équation $x^3 = 15x+4$ donne comme solution le réel 4.
   Vérifier que 4 est effectivement solution de l'équation.
   On a donc, en utilisant des nombres *imaginaires*, obtenu un résultat bien réel.
6. Si a et b sont deux réels strictement positifs, alors : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
   Si on applique cette propriété à $a = b = -1$, qu'obtient-on ?
   C'est la raison pour la quelle on n'utilisera plus jamais la notation $\sqrt{-1}$, mais i, nombre imaginaire dont le carré $i^2 = -1$.
   Il aura fallu attendre près de 150 ans pour prendre cette notation dûe à **Euler**.