LYCÉE ERNEST BICHAT **TS**
2009–2010

Méthode d'Euler et exponentielle

Rappel : Si f est une fonction dérivable en a, alors il existe une fonction φ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \qquad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler pour représenter une fonction connaissant sa dérivée.
Nous allons l'appliquer à la fonction exp, que nous noterons ici seulement f, qui vérifie :

$$\begin{cases} f'(x) = & f(x) \\ f(0) = & 1 \end{cases}$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant les conditions satisfaites par f, démontrer que l'on a :

   $$f(a+h) \simeq (1+h)f(a) \qquad \text{puis} \qquad f(a+2h) \simeq (1+h)^2 f(a)$$

   Nous admettrons pour la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

   Remarque : Cette approximation est vraie pour $h > 0$ ou $h < 0$. Elle est d'autant meilleure que h est proche de 0.
2. On note $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par : $u_n = (1+h)^n f(a)$.
   Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique et préciser sa raison.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$. On a donc :

   $$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

   (a) On pose $x = nh$. Vérifier que pour n assez grand :

   $$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

   Remarque : cette approximation est d'autant meilleure que n est grand.

   (b) À l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100, et 1 000. Tracer ces trois courbes en même temps pour observer l'évolution.

   (c) En prenant $n = 10\ 000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$