

Devoir maison n°1

Donné le 19/09/2009 – à rendre le 26/09/2010
La note tiendra compte de la qualité de la rédaction**Exercice 1** On veut trouver une (la) solution réelle de l'équation :

$$x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = 0$$

Pour cela, on se ramène à la résolution d'une équation du type :

$$X^3 + pX + q = 0$$

1. Déterminer trois réels a , p et q tels que pour tout x ,

$$x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = (x + a)^3 + p(x + a) + q$$

2. En posant $X = x + a$, vérifier que :

$$X^3 + 12X - 112 = 0 \quad (E)$$

3. Résoudre l'équation (E) en appliquant la formule de Cardan vue en cours.
(conserver les racines cubiques)
4. Vérifier que :

$$(2 + 2\sqrt{2})^3 = 56 + 40\sqrt{2} \quad \text{et} \quad (2 - 2\sqrt{2})^3 = 56 - 40\sqrt{2}$$

5. En déduire une écriture simple de la solution de l'équation (E) puis la solution de la première équation.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + 4x - 16$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Établir un tableau de variation de la fonction f .
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .
4. Donner (sans justification) la solution de l'équation $f(x) = 0$, et la vérifier par calcul.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.