LYCÉE ERNEST BICHAT **TS**
2009–2010

Devoir maison n°2
Donné le 21/09/2009 – à rendre le 28/09/2009

Exercice 1 On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = 3iz + 5$.

1. Déterminer l'affixe du point A', image par f du point $A(1 - i)$.
2. Quel est le point C qui a pour image lui-même par f ?
3. Déterminer $z_{\overrightarrow{CA}}$ et $z_{\overrightarrow{CA'}}$.
4. Quelle est la relation entre $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CA'}$? (Aide : calculer leur produit scalaire)
5. Quelle est l'image par f de l'axe des réels purs ? Quelle est celle de l'axe des imaginaires purs ?
6. Placer les points A, A', C et l'image (en couleur) de l'axe des réels purs sur le repère.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites définies par $u_0 = 12$ et $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Démontrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique.
   (b) Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\dfrac{11}{12^n}$.
   (c) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et déterminer sa limite.
2. Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. et que $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (Aide : utiliser la définition d'une suite croissante ou décroissante)
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > v_n$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$