

Devoir maison n°3
Donné le 28/09/2009 – à rendre le 05/10/2009

Exercice 1

- Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $Z = z^2 + 2z - 3$ est un nombre réel.
- Décrire l'ensemble des points du plan complexe $M(z)$ qui sont tels que Z est un nombre réel. Autrement dit, donner une description géométrique de l'ensemble déterminé à la question 1.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $I =]0; 2[$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2-2x}$$

- Montrer que pour tout x dans I , $f(x) = (1+x) \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x-2}$.
 - En déduire les limites de f aux bornes de I .
- Justifier que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée f' .
 - Étudier le signe de f' sur I .
 - La fonction f admet-elle des extremums sur I ? Si oui, préciser leur type et pour quelles valeurs de x ils sont **atteints**.
- Faire le tableau de variation de f (Remarque : il n'est pas demandé de tracer la courbe).

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

- Dresser le tableau des variations de f .
- Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et tracer la droite.
- Déterminer l'équation de la droite T_2 , image de T_1 par symétrie par rapport à l'axe des abscisses et tracer la droite.
- Tracer la courbe Γ_1 de la fonction f .
- Tracer la courbe Γ_2 , symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des abscisses.
- Démontrer que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ a pour équation cartésienne $x^3 + (x-1)y^2 = 0$.
La courbe Γ est appelée cissoïde de Dioclès.