LYCÉE ERNEST BICHAT **TS**
2009–2010

Devoir maison n°4
Donné le 12/09/2009 – à rendre le 19/10/2009

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

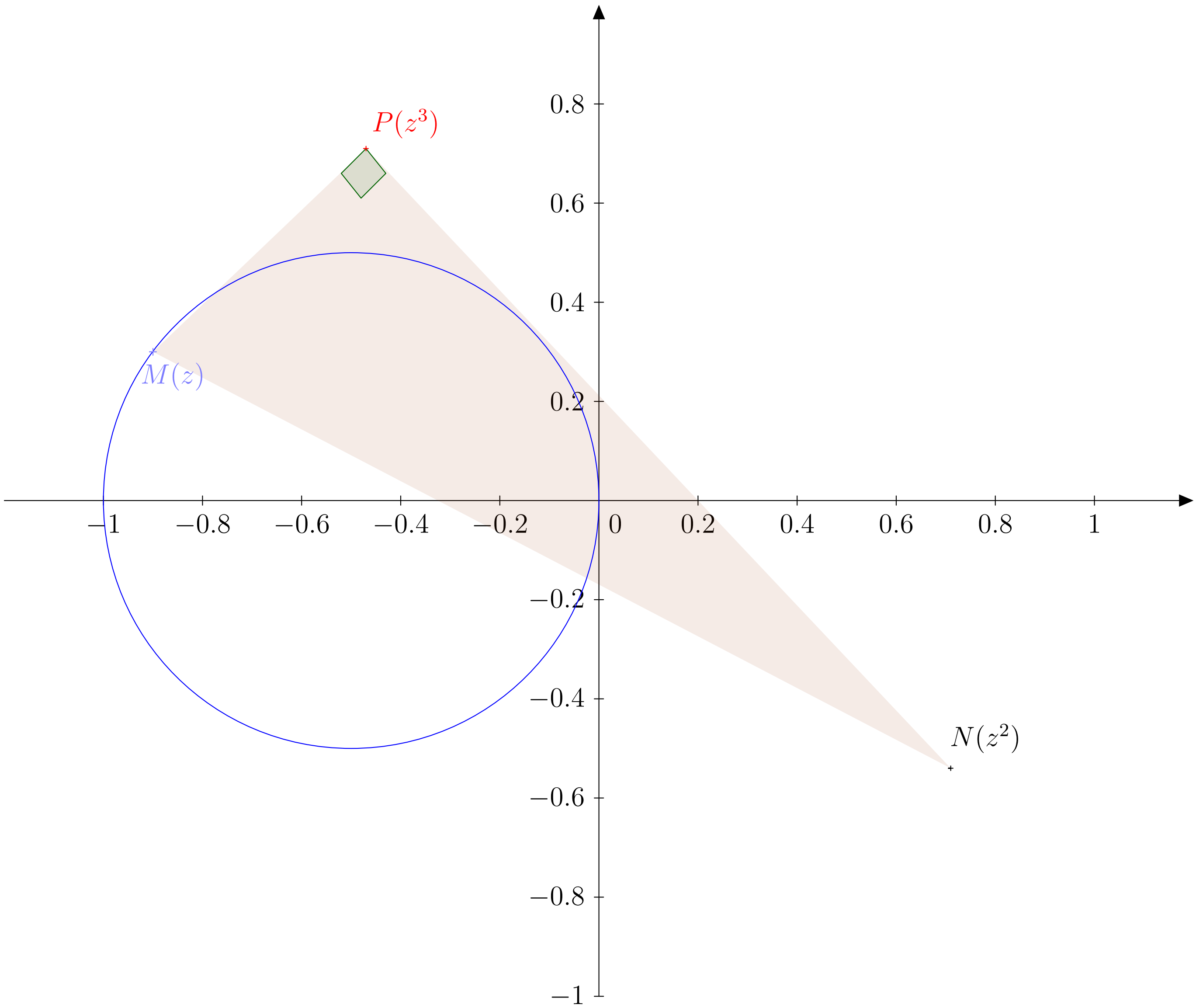
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est une fonction impaire, autrement dit que $f(-x) = -f(x)$.
   Qu'est-ce que cela signifie pour la courbe $\mathcal{C}$?
3. (a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. (a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x + 1}$.
   (b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
5. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
6. Tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point O (après avoir justifié son coefficient directeur), les asymptotes Δ et Δ' (on remarquera que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ' en $-\infty$) puis la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 On considère le point A d'affixe -1, et B d'affixe 1 dans le plan complexe munit d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, B et O.
À tout point M de $\mathscr{E}$ d'affixe z on associe le point N d'affixe z^2 et P d'affixe z^3.
Le but ici est de déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que MNP soit rectangle en P.

1. Montrer que si $z = \dfrac{i-1}{2}$, alors MNP est rectangle en P.
2. Prouver que quel que soit $z \in \mathscr{E}$, les points M, N et P sont distincts deux à deux.
3. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.
4. Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z + \dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$.
5. En déduire que l'ensemble recherché est, à l'exception de deux points à préciser, un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Aide : Il sera utile de savoir qu'étant donnés deux points A et B du plan complexe, $AB = |z_B - z_A|$.



$P(z^3)$
$M(z)$
$N(z^2)$
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1