

## Devoir maison n°5

Donné le 19/10/2009 – à rendre le 09/11/2009

**Exercice 1** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-2; +\infty[$  par  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ .

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Etudier le signe de  $f'(x)$  puis établir le tableau de variations de  $f$ .  
On admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
3. Justifier que  $f$  admet un maximum en  $x = -1$  et exprimer de manière simple sa valeur.
4. Faire une représentation graphique de la fonction  $f$  sur  $[-2; 8]$ .
5. Vérifier que sur  $[-2; +\infty[$  la fonction  $f$  vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = \frac{1}{e^x} \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

On dit que  $f$  est solution sur  $[-2; +\infty[$  de l'équation différentielle  $y' + y = \frac{1}{e^x}$  avec la condition initiale  $y(0) = 2$ .

**Exercice 2** Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit  $A(3)$  et  $B(-4i)$  deux points du plan complexe. Montrer que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z - 3| = |z + 4i|$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ .
2. Soit  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points deux à deux distincts tels que  $\frac{c - a}{b - a} = 2i$ .  
Montrer que  $A$  est sur le cercle de diamètre  $[BC]$ .
3. (a) Montrer que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = 2(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , avec  $\theta$  appartenant à  $[0; 2\pi]$  est un cercle de centre  $O$  (l'origine du plan complexe) dont on précisera le rayon.  
(b) Montrer alors que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = 2 + 3i + 2(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , avec  $\theta$  appartenant à  $[0; 2\pi]$  est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 3(Énigme)** Une très grande ficelle fait exactement le tour de la Terre, faisant un cercle mesurant 40 000 km. Une ficelle plus raisonnable fait simplement le tour d'une roue de vélo, ce tour mesurant 4 m. On ajoute à chaque ficelle un mètre de ficelle, et l'on reforme des cercles avec ces ficelles rallongées. la plus grande est centrée sur le centre de la terre et la seconde l'est sur le centre de la roue. Laquelle des deux ficelles « décolle » le plus de son support initial ? Quelle est la différence entre des deux hauteurs de « décollage » ?