Devoir maison n°6
Donné le 16/11/2009 – à rendre le 23/11/2009

Exercice 1 Soit E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui au réel t associe sa partie entière $E(t)$, qui vérifie :

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

On considère la fonction f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin\left[xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right] \text{ si } x \in]0; 2\pi] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout réel t, $t - 1 < E(t) \leq t$.
2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$. Aide : penser à un théorème de première.
3. En déduire que f est continue en 0.
4. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $E\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = 0$ puis l'équation $E\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = k$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$.
   Aide : pour quelle valeurs de t a-t-on $E(t) = k$?
5. Expliciter f sur les intervalles $\left]\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$, c'est à dire exprimer $f(x)$ sans partie entière.
6. Expliciter f sur $\left]\dfrac{\pi}{k+1}; \dfrac{\pi}{k}\right]$, $k \in \mathbb{N}^\star$. Réponse : $f(x) = \sin(kx)$.
7. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$, f n'est pas continue en $x = \dfrac{\pi}{k}$. Où est-ce que la fonction f est continue ? Justifier.
8. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ on pose $y_k = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{k}^+} f(x)$. Observer que le point $M_k\left(\dfrac{\pi}{k}; y_k\right)$ se trouve sur la courbe représentative $(\mathcal{S})$ d'une fonction de référence. Tracer alors cette courbe $(\mathcal{S})$ ainsi que la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction f sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{6}, \pi\right]$ dans un repère $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ tel que $\| \overrightarrow{i} \| = 4$ cm et $\| \overrightarrow{j} \| = 10$ cm.