Devoir maison n°10
Donné le 18/01/2010 – à rendre le 25/01/2010

Ce sujet comporte 2 exercices. La règle est la suivante : choisir un camarade avec qui vous formerez un binôme et rendrez ainsi une copie commune comportant deux parties. Vous devez rédiger un exercice et votre camarade rédigera le second exercice. Chacun sera noté sur la partie qu'il aura rédigé, ce qui devra donc être indiqué. Le nombre d'élèves étant éventuellement impair, **le seul** élève sans binôme choisira librement l'exercice qu'il veut traiter.

Exercice 1 Un citadin décide un jour de faire la chose suivante : chaque samedi après-midi il ira soit au cinéma, soit à la médiathèque. Le premier samedi il choisit au hasard le lieu où il va. On rappelle que « choisir au hasard » signifie que les choix possibles sont équiprobables. Par la suite, chaque samedi il choisit d'aller à l'autre lieu que la semaine passée avec la probabilité $0,8$.
Pour tout $i \geq 1$ on note l'événement C_i : « Le citadin va au cinéma le i$^{\text{ème}}$ jour » et M_i : « le citadin va à la médiathèque le i$^{\text{ème}}$ jour ».

1. Que peut-on dire, pour un $i \geq 1$ fixé, des événements C_i et M_i ?
2. Donner les valeurs de $\mathrm{P}(C_1)$, $\mathrm{P}(M_1)$ et $\mathrm{P}_{C_1}(M_2)$.
3. Calculer $\mathrm{P}(C_1 \cap C_2)$.
4. Déterminer la probabilité que le citadin aille dans le même lieu les deux premiers samedi.
   Remarque : sans hypothèse supplémentaire, il n'est pas possible de déterminer la probabilité que le citadin aille dans le même lieu les trois premiers samedi.
5. Déterminer la probabilité que le citadin aille au cinéma le second samedi.
6. Déterminer la probabilité que le citadin aille au cinéma le troisième samedi.
7. Justifier brièvement que pour tout $i \geq 1$, $C_{i+1} = (C_{i+1} \cap C_i) \cup (C_{i+1} \cap M_i)$ et que les événements $C_{i+1} \cap C_i$ et $C_{i+1} \cap M_i$ sont incompatibles.
8. Démontrer que pour tout $i \geq 1$, $P(C_i) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier ses variations.
   (b) En déduire que si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \in [1; 2]$.
2. On considère les suites u et v définies par :

$$u_0 = 1 \text{ puis } u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad v_0 = 2 \text{ et } v_{n+1} = f(v_n), n \geq 0$$

   (a) Démontrer par récurrence que u et v sont bornées par 1 et 2.
   (b) Démontrer par récurrence que u est croissante et que v est décroissante.
   (c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(1+u_n)(1+v_n)}$$

   (d) En déduire (par récurrence) que $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Prouver que les suites u et v convergent et déterminer leurs limites.