Devoir maison n°12
Donné le 01/03/2010 – à rendre le 08/03/2010

Exercice 1 Lire le cours du livre p152 sur le logarithme décimal. On retient surtout la définition et la dernière conséquence. En effet, une des applications du logarithme décimal est de déterminer le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture d'un nombre entier. Faire alors l'exercice 44p164.

Exercice 2 Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$$

Partie A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.
   (a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x \in I$.
   (c) Résoudre dans I l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$.
   (d) Étudier le sens de variation de g sur I.
   (e) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1; e^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$.
2. φ est la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

   (a) Étudier la limite de la fonction φ en 1. On admet que φ admet pour limite 0 en $+\infty$.
   (b) Calculer $\varphi'(x)$ et prouver que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur I.
   (c) Démontrer que φ est croissante sur $]1;\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur $]\sqrt{\alpha};+\infty[$.

Partie B

1. Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$.
2. En déduire :
   (a) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;
   (b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;
   (c) le sens de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.
3. Prouver que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

4. Calculer au centième près les valeurs de f en $0,1$; $0,5$; 1 ; $1,5$; 2 et 3.
5. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.