LYCÉE ERNEST BICHAT **TS**

2009–2010

Devoir maison n°13

Donné le 15/03/2010 – à rendre le 22/03/2010

Exercice 1 On considère, dans l'espace, les points $A(0;-1;-1)$, $B(6;1;9)$ et $C(1;0;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A ayant $\overrightarrow{n}(3;1;4)$ pour vecteur normal.
2. Déterminer une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$ (on s'inspirera de l'équation d'un cercle de diamètre donné dans un plan).
3. Préciser les coordonnées du centre O et le rayon R de la sphère $\mathscr{S}$.
4. Soit G le barycentre du système $\{(A,1);(B;1);(C,2)\}$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point G.
   (b) Déterminer l'ensemble E des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}$ soient colinéaires.

Exercice 2 On considère les deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ dont les équations sont données ci-dessous :

$$(\mathscr{P}_1) : -2x+6y-2z+3=0$$

$$(\mathscr{P}_2) : 3x-9y+3z+6=0$$

1. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $(\mathscr{P}_1)$ et un vecteur normal $\overrightarrow{m}$ au plan $(\mathscr{P}_2)$.
2. Les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont-ils parallèles ou non ?
3. Soit $A(1;1;0)$.
   (a) Le point A est-il dans $(\mathscr{P}_1)$? Dans $(\mathscr{P}_2)$?
   (b) Déterminer la distance de A à chacun des deux plans.

Exercice 3 Soit a et b deux réels non nuls. On souhaite trouver toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$, où y est une fonction inconnue, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{b}{a}$. Démontrer que f est solution de (E).
2. Soit g une solution quelconque de (E). Démontrer que $g - f$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' = ay$ et en déduire que g est de la forme $g(x) = Ae^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où A est une constante.

   Remarque : il n'y a pas de condition initiale donnée pour l'équation différentielle, autrement dit $y(0)$ n'est pas imposé.
3. Réciproquement, vérifier que toute fonction y définie par $y(x) = Ae^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où A est une constante est bien solution de (E).