Exercice 1(3 pages 239-240)

1. Le cercle de centre $B(0,0,h)$ a pour rayon R. Le cercle de centre $M(0,0,z)$ $(0 \leq z \leq h)$ a un rayon r à déterminer. Grâce au Théorème de Thalès, on a le rapport demandé : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{z}{h}$.
   Ainsi, $r = R\dfrac{z}{h}$. La figure $\mathscr{D}(z)$ est un disque (section d'un cône par un plan parallèle à la base).
2. $\mathscr{A}(z) = \pi r^2 = \pi \dfrac{R^2 z^2}{h^2} = \dfrac{\pi R^2}{h^2} z^2$.
3. D'après l'information donnée page 239, $V = \displaystyle\int_0^h \mathscr{A}(z)dz = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 dz$
4. En continuant le calcul (utilisant la linéarité de l'intégrale et l'aide apportée dans la question),

$$V = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Exercice 2(48p249)

1. (a) Pour tout $t \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + t + (n+1) \geq 1 + t + n \geq 0$.
   En inversant cette inégalité, $\dfrac{1}{1+t+(n+1)} \leq \dfrac{1}{1+t+n}$. Comme l'exponentielle ne prend que des valeurs positives, on obtient $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+(n+1)} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n}$. D'après la propriété du cours, on a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t+(n+1)} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t+n} dt$, soit $I_{n+1} \leq I_n$. Autrement dit, la suite I est décroissante.

   (b) Pour tout $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \geq 0$, donc d'après la propriété du cours, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t+n} dt \geq 0$.
   Autrement dit, $I_n \geq 0$. La suite I est bien à termes positifs.
   Si $t \in [0;1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 + t + n \geq 1 + n \geq 0$. En inversant, puis en mutipliant par e^{-t^2} qui est toujours positif, on obtient $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+n}$. Or, $-t^2 \leq 0$ et la fonction exponentielle est croissante, donc $e^{-t^2} \leq e^0 = 1$. On a donc $\dfrac{e^{-t^2}}{1+n} \leq \dfrac{1}{1+n}$, puis (par transitivité) $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leq \dfrac{1}{1+n}$. D'après la propriété du cours, on a alors

$$\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t+n} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+n} dt = \frac{1}{1+n}(1-0) = \frac{1}{1+n}$$

   Soit $I_n \leq \dfrac{1}{1+n}$. Comme nous avons déjà prouvé que I est une suite à termes positifs, nous avons bien, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{1+n}$. En utilisant le théorème des gendarmes, on en conclut, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n} = 0$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. (a) On a $f'(x) = -e^{-x} + 1$. On résout :
   $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^0 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x$ (car exp est croissante) $\Leftrightarrow x \geq 0$.
   Ainsi, f est croissante sur $[0;1]$, et pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \geq f(0) = 1 + 0 - 1 = 0$, c'est à dire que f est positive.

   (b) Pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) = -1 + x + e^{-x} = f(x) \geq 0$, donc g est croissante sur $[0;1]$.

   (c) Sur $[0;1]$,
   – On sait que f est positive, donc $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 - x$.
   – On sait que g est croissante, donc $x \in [0;1]$, $g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - x + \dfrac{x^2}{2} \geq e^{-x}$
   Donc :

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

(d) En remplaçant x par t^2 dans l'inégalité ci-dessus (on a bien $t^2 \in [0;1]$ si $t \in [0;1]$),

$$1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq 1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$$

(e) Quand $t \in [0;1]$ on a effectivement $1 + n \leq 1 + t + n \leq 2 + n$, donc $\dfrac{e^{-t^2}}{2+n} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+n}$.

En utilisant la question précédente, on obtient alors $\dfrac{1-t^2}{2+n} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leq \dfrac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n}$. Ensuite, d'après la propriété du cours, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{2+n}dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t+n}dt \leq \int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n}dt$.

Calculons les deux intégrales aux extrémités (celle du milieu étant I_n) :

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{2+n}dt = \frac{1}{2+n}\left(\int_0^1 1dt - \int_0^1 t^2dt\right) = \frac{1}{2+n}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2+n} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3(2+n)}$$

$$\int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n}dt = \frac{1}{1+n}\left(\int_0^1 1dt - \int_0^1 t^2dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t^4dt\right) = \frac{1}{1+n}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right) = \frac{23}{30(1+n)}$$

On a donc bien : $\dfrac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \dfrac{23}{30(n+1)}$.

(f) On veut $I_p \leq 10^{-2}$. Il suffit donc d'avoir d'après l'inégalité ci-dessus $\dfrac{23}{30(2+p)} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p \geq 74 + \dfrac{2}{3}$. Il suffit donc de prendre $p = 75$.

Exercice 3(Bonus : 55p347 du DM précédent) Les plans horizontaux et verticaux délimitant le prisme ont pour équation (immédiate) :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le plan (CDE) a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Puisque ce plan ne passe pas par l'origine du repère on a donc $d \neq 0$ (les coordonnées de $O(0;0;0)$ ne vérifient pas l'équation). On peut donc diviser cette équation par d, puis la multiplier par 12 (!), puis en renommant les constantes on se trouve avec une équation de la forme $ax + by + cz + 12 = 0$. Puisque $D(0;3;0)$, $E(0;0;4)$ et $C(2;3;0)$ appartiennent au plan (CDE), on a alors :

$$\begin{cases} 3b + 12 = 0 \\ 4c + 12 = 0 \\ 2a + 3b + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = -3 \\ a = 0 \end{cases}$$

D'où l'équation de (CDE) : $-4y - 3z + 12 = 0$. Il reste à trouver les inégalités correspondantes pour caractériser l'intérieur du prisme. Pour les parties horizontales et verticales, l'inégalité est encore immédiate (le « bon sens » suffit à déterminer le bon sens). Pour la partie située « sous » le plan (CDE), on utilise le fait que $O(0;0;0)$ est dans le bon demi-espace. Ainsi, les coordonnées vérifient l'inégalité recherchée. Or, en remplaçant celles-ci, on a $-4 \times 0 - 3 \times 0 + 12 = 12 \geq 0$. Ainsi, l'inéquation recherchée est $-4y - 3z + 12 \geq 0$, et le système complet recherché est (cinq inéquations pour cinq faces) :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ z \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -4y - 3z + 12 \geq 0 \end{cases}$$