Devoir maison n°16
Donné le 07/04/2010 – à rendre le 26/04/2010

Exercice 1 On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.
Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3. Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher, quatre portant le nombre 1 et un portant le nombre -1. On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont indépendants et équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que le système de points pondérés $\{(A,a);(B,b);(C,4)\}$ admet toujours un barycentre. On le note G.
2. (a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   – E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;
   – E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».

   (b) Montrer que la probabilité de l'événement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\frac{2}{5}$.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G défini plus haut. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.

   (a) Déterminer l'entier n pour que l'espérance de X soit égale à 4.

   (b) Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure à $0,999$.

Exercice 2 On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée. Pour $k \in \{1;2;3;4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,3$ et $p_4 = 0,4$.

1. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont indépendants.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres $1,2,4$?

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
2. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

   (a) Pour $0 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

   (b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

   (c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
3. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

Exercice 3 Rien à rédiger pour cet exercice. Il s'agit simplement de réviser avec sérieux toutes les formules de dérivation connues, sans oublier les fonctions composées, ainsi que l'exponentielle et le logarithme.