

Devoir maison n°19

Donné le 26/05/2010 – à rendre le 31/05/2010

Exercice 1

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

1. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1)$.
Démontrer que la courbe f admet deux asymptotes dont la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x$.
Déterminer la position de la courbe par rapport à chacune de ses asymptotes.
4. Construire la courbe de f dans un repère orthogonal (unité 2 cm).

Partie B

On désire déterminer un encadrement de l'aire du domaine du plan défini par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

1. Exprimer cette aire en unités d'aires à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.
2. Calculer $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln 2 \right) dx$.
3. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln 2 - f(x)$.
 - (a) Étudier les variations de la fonction g' dérivée de g sur l'intervalle $[0; 1]$.
En déduire le signe de $g'(x)$, puis les variations de g et enfin le signe de g sur $[0; 1]$.
 - (b) Démontrer que pour tout x de $[0; 1]$, $0 \leq g(x) \leq 5 \times 10^{-3}$.
En déduire un encadrement de la fonction f sur $[0; 1]$ par deux fonctions polynomiales du second degré, puis un encadrement de l'aire cherchée, ainsi qu'une valeur décimale de cette aire en cm^2 en précisant quelle est l'incertitude.

Exercice 2 On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1. Le jeu se déroule de la façon suivante : un joueur tire simultanément 3 boules.
 - (a) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « le joueur a tiré exactement une boule noire » ;
B : « le joueur a tiré exactement deux boules noires » ;
C : « le joueur a tiré exactement trois boules noires ».
 - (b) Le joueur gagne 5€ pour chaque boule noire obtenue. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme gagnée. Établir la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
2. Le jeu se déroule maintenant de la façon suivante :
Le contenu de l'urne est inchangé. Le joueur tire une boule.
 - Si elle est noire, il gagne et la partie est terminée.
 - Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un nouveau tirage dans les mêmes conditions.
 La partie d'arrête impérativement après le troisième tirage.
(Elle peut donc comporter 1, 2 ou 3 tirages).
 - (a) Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne au premier tirage ?
 - (b) Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne au second tirage ?
 - (c) Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne au troisième tirage ?
 - (d) Quelle est la probabilité pour que le joueur n'ait rien gagné à la fin de la partie ?