Terminale S	Devoir commun n° 4 : 2heures	le 3 décembre 2009

Exercice 1 5 points

Pour chacune des cinq questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de l'exercice est négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3i, -3-i$ et $2{,}08+1{,}98i$.

Le triangle ABC est :

A) Isocèle et non rectangle **B)** Rectangle et non isocèle **C)** Rectangle et isocèle **D)** Ni isocèle, ni rectangle

2. A tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z-4i}{z+2}$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est :

A) un cercle de rayon 1 **B)** une droite **C)** une droite privée d'un point **D)** un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est un réel est :

A) un cercle **B)** une droite **C)** une droite privée d'un point **D)** un cercle privé d'un point

4. Un argument de $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$ est :

A) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^4$ **B)** $-\frac{2\pi}{3}$ **C)** $\frac{\pi}{6}$ **D)** $\frac{2\pi}{3}$

4. Dans le plan rapporté à un repère d'origine O, soient A, D et E les points d'affixe respective $z_A = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$, $z_D = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_E = 1 + i\sqrt{3}$. Alors :

A) A, D et E sont alignés **B)** le milieu de [DE] a pour affixe $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** E appartient au cercle de centre D et de rayon 1 **D)** $\arg z_E = 2\arg z_D$

Exercice 2 5 points

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = e^x\,(x-1) + x^2$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Donner un encadrement de cette solution à 10^{-3} près.

Exercice 3 6 points

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Partie A : On pose $a = -3$.

Démontrer que la suite (u_n) est constante.

Partie B : On pose $a = 0$

1. a) Calculer u_1, u_2, u_3.
   b) La suite (u_n) est elle arithmétique ? est elle géométrique ?
2. Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + 3$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Donner l'expression de vu_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
   c) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout n entier naturel,
   $$1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
   d) Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_9$ et $S' = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_9$

<u>Exercice 4</u> 4 points

On rappelle les deux propriétés suivantes :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel x, la dérivée de e^x est e^x.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x)$

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

   Montrer que f est continue en 0.

3. a) Etablir que pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x(1+ \dfrac{1}{e^x - 1})$

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$