LYCÉE ERNEST BICHAT **TS**
2009–2010

Devoir surveillé n°5
le 13/01/2010

Exercice 1(3 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $y = 2x + 1$ et $y = 2x - 1$ sont asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f.

Exercice 2(8,5 points)
Partie A

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} + i, \qquad z_B = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle.
   Placer les points A et B.
2. Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$.
   En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.
3. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer C.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

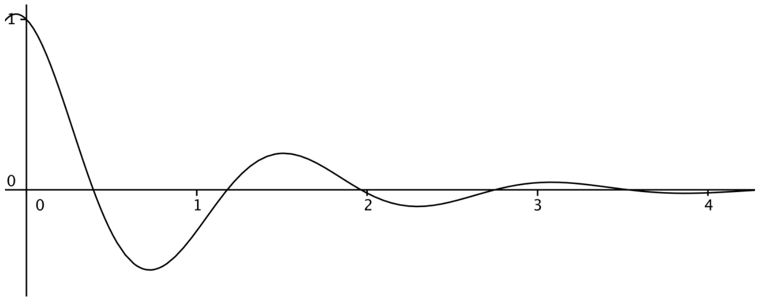
$$z' = e^{-\frac{i\pi}{6}} z$$

1. Déterminer la nature de cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A', B' et C', images par f respectivement de A, B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm^2 ?

Exercice 3(3,5 points) Soit u la suite définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.
2. Démontrer que si $n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \dfrac{4}{3}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2} \times u_2$.
4. Conclure quant à la convergence de u.

Exercice 4(5 points - Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas la spécialité mathématique) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tracée ci-dessous.



On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.
3. On définit la suite u sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En préciser la raison.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et étudier sa convergence.

Exercice 4(5 points - Uniquement pour les élèves qui suivent la spécialité mathématique. À faire sur une copie séparée)

1. (a) Déterminer le PGCD des nombres 188 et 28.
   (b) Soit l'équation $188x + 28y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ?
   (c) Soit l'équation $188x + 28y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ?
2. (a) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide et en détaillant les calculs, deux entiers relatifs u et v tels que : $47u + 7v = 1$.
   (b) En déduire deux entiers relatifs x_0 et y_0 tels que : $47x_0 + 7y_0 = 2$.
   (c) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation $47x + 7y = 2$.
3. Déterminer les entiers naturels x tels que $47x \equiv 2[7]$.