Mathématiques

Durée : 4 heures

L'utilisation de la machine à calculer est autorisée

Le sujet comporte 4 pages.

Exercice 1 : 4 points

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- Les ingénieurs ;
- Les opérateurs de production ;
- Les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 82% d'operateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des operateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.
On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
a. un agent de maintenance ;
b. une femme agent de maintenance ;
c.une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'événement : « une panne se produit ».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 2 : 5 points

Uniquement pour les non spécialistes

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm)

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.
2. **a)** Vérifier que $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b) En déduire la nature du triangle ABC.

   c) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
   Tracer le cercle Γ_1.
3. **a)** Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

   b) Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1. Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

   b) Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.
5. Soit r une rotation. Pout tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
   On posera $z' = az + b$ avec a et b des nombres complexes verifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
   On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

   a) Quelle est l'image de Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

   b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point r(C), image du point C par la rotation r ; en déduire que le point r(C) appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

Exercice 2 : 5 points

Uniquement pour les spécialistes

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\,;1\,;2\,;\ldots;24\,;25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26. Ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

1. Que dire du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
3. *Dans toute la suite de l'exercice,* on prend $a = 5$ et $b = 2$.

   a) On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26, alors $n - p$ est un multiple de 26.
   En déduire que $n = p$.

   b) Coder le mot AMI.
4. On se propose de décoder la lettre E.

   a) Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

   b) On considère l'équation $5x - 26y = 2$ avec x et y entiers relatifs.
   1) Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.
   2) Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.
   3) En déduire qu'il existe un unique couple $(x\,;y)$ solution de l'équation précédente avec $0 \leq x \leq 25$.

   c) Décoder alors la lettre E.

Exercice 3 : 5 points

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   a) Calculer u_2, u_3 et u_4.
   b) Montrer que**,** pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + 3$.
   c) Sur l'annexe à rendre avec la copie sont tracées dans un repère orthonormal les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}\,x + 3$.
   A partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.
   Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n,
   $w_{n+1} = \frac{1}{2}\,w_n + 3.$
   On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6.
   Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

Exercice 4 : 6 points

Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [1,27 ; 1,28]. On note α cette solution.
3. Déterminer le signe de g sur $]-\infty\,; 0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha\,[$ et $g(x) < 0$ sur $]\,\alpha\,;\,+\infty\,[$.

Partie B Etude d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x+1} + 2$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Etudier la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a)** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour $\mathcal{C}_f$.
   c) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
3. **a)** Montrer que la fonction dérivée de f a le même signe que la fonction g étudiée dans la **partie A**.
   b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   c) Dresser le tableau de variations de f**.**
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 3