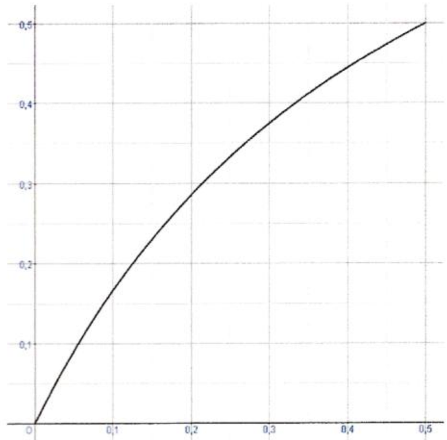
Terminale S | Devoir commun : 2 heures | Le 8/04/10

<u>Exercice 1</u> : 6 points

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$ par $f(x)=\dfrac{2x}{1+2x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative sur cet intervalle (voit graphique ci-contre).



1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$ et tracer cette tangente.
2. Déterminer une équation de la droite (OA) et tracer cette droite.
3. Montrer que, pour tout réel x de $[0\,;\,\frac{1}{2}]$, on a $x \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{4}$.
4. En déduire un encadrement de l'intégrale $I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

<u>Exercice 2</u> : 2 points

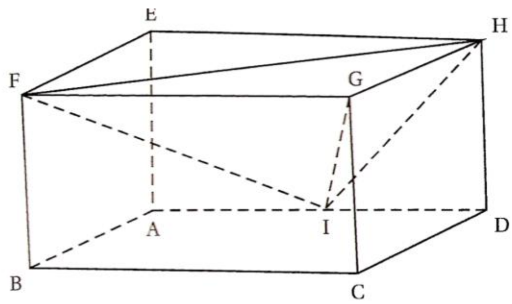
Dans l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-4y+15=0$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+10=0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

<u>Exercice 3</u> : 5 points Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas la spécialité mathématique.

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que : $AB=1, AD=2$ et $AE=1$.

L'espace est muni du repère orthonormé$(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H
2. a) Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\dfrac{1}{3}$.

   b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

   c) En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;1\,;\,-1)$.

   a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

   c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

<u>Exercice 3</u> : 5 points Uniquement pour les élèves qui suivent la spécialité mathématique.

A faire sur copie séparée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives : $z_A=2i, z_B=2, z_C=4+6i, z_D=-1+i$ et $z_E=-3+3i$.

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A)=D$ et $f(B)=A$.

   a) Donner l'écriture complexe de f.

   b) Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

   c) Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

   d) En déduire la nature du triangle DAE.

<u>Exercice 4</u> : 7 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. Tracer (D).

   c) Etudier la position relative de (D) et de $(\mathcal{C})$.

   d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

   e) En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x+1)}$.

   b) En déduire les variations de la fonction f.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On note $K = \int_0^4 \ln(1 + e^{-x})\, dx$. Interpréter graphiquement K.