LYCÉE ERNEST BICHAT **TS**

2009–2010

Devoir surveillé n°9
le 20/05/2010

Exercice 1(8 points) On a rangé en vrac, dans une boîte, neuf cartes postales indiscernables au toucher. Cinq de ces cartes proviennent de France, une provient d'Australie et trois des États-Unis.

1. On tire simultanément et au hasard trois cartes de la boîte.
   (a) Démontrer que la probabilité de n'obtenir aucune carte de France parmi les trois cartes est égale à $\dfrac{1}{21}$.
   (b) Calculer la probabilité des événements E_1 « lors d'un tirage, obtenir une carte de chaque pays » et E_2 « lors d'un tirage, obtenir au moins une carte de France ».
   (c) Soit X la variable aléatoire comptant, pour chaque tirage de trois cartes, le nombre de cartes de France obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles et les résultats seront rassemblés dans un tableau.
2. On répète ce tirage cinq fois de suite en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boîte. Quelle est la probabilité de l'événement « lors de ces cinq tirages, deux fois et deux fois seulement, on obtient aucune carte de France » ?
   Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. On répète ce tirage n fois de suite en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boîte. À partir de quelle valeur de n, la probabilité d'obtenir au moins un tirage sans carte de France est-elle supérieure ou égale à $0,95$?

Exercice 2(3 points)

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $\dfrac{1}{x(1+x)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2}$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2}$.

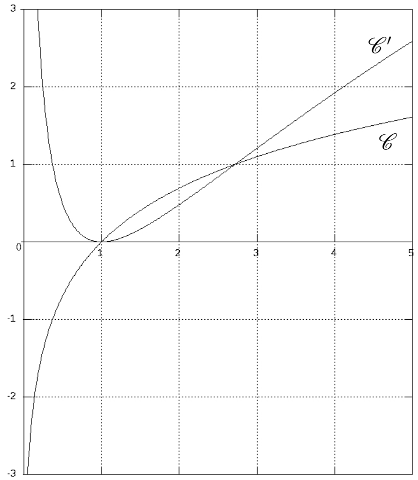
Exercice 3(5 points, pour les élèves qui suivent la spécialité) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 2+3i$, $c = 3i$, $d = -\dfrac{5}{2} + 3i$ et $e = -\dfrac{5}{2}$.

1. (a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.
   (b) Quelle est l'image du rectangle $OABC$ par s ?
   (c) Quel est l'angle de la similitude s ?
   (d) En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le centre Ω de la similitude appartient aux droites (OB) et (AD).
2. (a) Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et laisse A invariant est : $z' = -\dfrac{3}{2}i\overline{z} + 2 + 3i$.
   (b) Quelle est l'image du rectangle $OABC$ par s' ?
   (c) Démontrer que s' est la composée de la symétrie d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 3(5 points, pour les élèves qui ne suivent pas la spécialité)
Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \qquad \text{et} \qquad g(x) = (\ln x)^2$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont données.



1. (a) Étudier le signe de $(\ln x)(1-\ln x)$ sur $]0;+\infty[$.
   (b) En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0;+\infty[$.
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x\, dx$.
   (b) Vérifier que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :
   $$G(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$$
   est une primitive de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
   (c) On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

Exercice 4(4 points) On considère la suite numérique $(J_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}\,dt$$

1. Démontrer que la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. *dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On définit la suite $(I_n)_{n\geq 1}$, pour tout entier naturel n non nul, par :
   $$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt$$
   (a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.
   (b) En déduire que $J_n \leq I_n$.
   (c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
   (d) Que peut-on en conclure pour la suite $(J_n)_{n\geq 1}$?