Devoir surveillé n°9 – correction
le 20/05/2010

Exercice 1

1. (a) Si l'on considère que les trois cartes ne sont pas ordonnées, on peut utiliser les combinaisons. Le nombre de combinaisons de trois cartes parmi neuf est $\binom{9}{3} = 84$. Le nombre de combinaisons ne contenant aucune carte de France peut se compter de deux manières :
   - Soit l'on choisit directement les trois cartes parmi les quatres autres, ce qui fait $\binom{4}{3} = 4$ combinaisons possibles
   - Soit l'on détaille, en disant que l'on prend soit toutes les cartes parmi celles des États-Unis, soit que l'on en prend deux parmi celles des États-Unis, la troisième étant celle d'Australie, ce qui fait $\binom{3}{3} + \binom{4}{2} \times \binom{1}{1} = 1 + 3 = 4$.

   On obtient alors que la probabilité recherchée, que l'on notera p, est $p = \dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$.

   Si l'on considère que les trois cartes sont ordonnées, on peut raisonner ainsi : Il y a $9 \times 8 \times 7$ triplets de trois cartes. Le nombre de triplets de cartes ne comportant pas de carte de France est le nombre de triplets formés à partir des 4 autres cartes, ce qui fait $4 \times 3 \times 2$. On a donc $p = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \dfrac{1}{21}$.

   À partir d'un arbre on peut aussi dire que $p = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7}$, mais il faut penser que l'on ordonne, quand on utilise un arbre...

   (b) Pour obtenir une carte de chaque pays :
   - Avec les combinaisons : Il y a $\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} = 5 \times 3 \times 1 = 15$ combinaisons possibles. on a alors $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{15}{84} = \dfrac{5}{28}$.
   - Avec les cartes ordonnées : on choisit un ordre déterminé, par exemple F-EU-A, on compte le nombre de triplets ordonnés ainsi (il y en a $5 \times 3 \times 1 = 15$) puis le nombre de façons d'ordonner un tel triplet (il y en a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$).
     On a alors $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{15 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \dfrac{5}{28}$.

   $\mathbb{P}(E_2) = 1 - \mathbb{P}(\text{« aucune carte de France n'est obtenue »}) = 1 - p = \dfrac{20}{21}$.

   (c) Nous avons déjà donné $\mathbb{P}(X = 0) = p = \dfrac{1}{21}$. Nous utilisons les combinaisons pour la suite (deux raisonnements possibles selon que l'on détaille où sont prises les deux autres cartes ou non), par exemple :

   $$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{0} + \binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{84} = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

   En continuant pour les autres valeurs de X, on obtient (la somme vaut 1 !) :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\dfrac{1}{21}$	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{10}{21}$	$\dfrac{5}{42}$

2. L'épreuve qui consiste à tirer trois cartes et pour laquelle on s'intéresse au succès : « n'obtenir aucune carte de tirage » est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{21}$.

   La répétition de cette épreuve cinq fois de suite de manière indépendante (les trois cartes sont remises à chaque fois) est un shéma de Bernoulli.

La variable Y (pas la même que le X précédent) qui compte le nombre de succès suit alors la loi binomiale de paramètres 5 et p.

La probabilité demandée est alors $\mathbb{P}(Y=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{21}\right)^2 \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 \simeq 0,01958 \simeq 0,020$

3. Ici la répétition du tirage se fait n fois au lieu de 5. Notons encore Y la variable comptant le nombre de succès ; elle suit la loi binomiale de paramètres n et p. La probabilité d'obtenir au moins un tirage sans carte de France est $\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y=0) = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n$. En effet, Y compte le nombre de tirages **sans** carte de France.

   On veut donc $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geq 0,95$, soit, en utilisant le logarithme (croissant sur $]0;+\infty[$) : $n \geq \ln(0,05) \div \ln(\frac{20}{21}) \simeq 61,4$. Ainsi donc n doit être supérieur ou égal à 62.

Exercice 2

1. On veut $\dfrac{1}{x(1+x)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2}$.

   Mettons l'expression de droite au même dénominateur et ajoutons :

   $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2} = \dfrac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2} = \dfrac{a + 2ax + ax^2 + bx + bx^2 + cx}{x(1+x)^2}$

   $= \dfrac{a + (2a+b+c)x + (a+b)x^2}{x(1+x)^2}$. On veut donc $a + (2a+b+c)x + (a+b)x^2 = 1$.

   Par identification des fonctions polynomiales (en x) on a donc $a = 1$, $2a+b+c = 0$ et $a+b = 0$. Cela fait trois équations pour trois inconnues, que l'on résout aisément, ce qui donne : $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$. Ainsi, $\dfrac{1}{x(1+x)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

2. D'après la question précédente, et par linéarité,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2} &= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x}dx + \int_1^2 \frac{-1}{(1+x)^2}dx \\
&= [\ln x]_1^2 - [\ln(1+x)]_1^2 + \left[\frac{1}{1+x}\right]_1^2 \\
&= \ln 2 - \ln 1 - \ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= 2\ln 2 - \ln 3 + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} \\
&= \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. (a) $(\ln x)(1 - \ln x)$ est un produit, il s'agit donc d'étudier le signe de chacun de ses facteurs. $\ln x \geq 0$ si $x \geq 1$ et $1 - \ln x \geq 0$ si $\ln x \leq 1$, soit $x \leq e$. À l'aide d'un tableau de signes, on voit donc que $(\ln x)(1-\ln x) > 0$ si $x \in]1; e[$ et que $(\ln x)(1-\ln x) < 0$ si $x \in]0; 1[\cup]e; +\infty[$.

   (b) $f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = (\ln x)(1 - \ln x)$, dont nous venons de déterminer le signe. Ainsi, $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{C}'$ lorsque la différence est positive, c'est à dire lorsque $x \in]1; e[$, et au-dessous sinon. Ce qui est confirmé par le graphique.

2. (a) $\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e 1 \times \ln x \, dx$. Notons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. On a alors

$$\int_1^e 1 \times \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e 1 \, dx = e - 1(e-1) = 1$$

(b) Il suffit de dériver la fonction G, qui est sous la forme d'un produit.

$$\begin{aligned} G'(x) &= 1 \times [(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] + x \times [2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 2 \times \frac{1}{x} + 0] \\ &= (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2 = (\ln x)^2 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

G est donc bien une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

(c) On nous demande en fait de calculer $\int_1^e f(x) - g(x)\ dx$ car la courbe de f est au dessus de celle de g sur l'intervalle $[1; e]$. Par suite, en utilisant la linéarité de l'intégrale, le calcul de l'intégrale de $f(x)$ déjà calculée et la connaissance de la primitive de g :

$$\mathscr{A} = \int_1^e f(x)\ dx - \int_1^e g(x)\ dx = 1 - [x((\ln x)^2 - 2\ln x + 2)]_1^e = 1 - e + 2 - 2 + 2 = 3 - e$$

Exercice 4

1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{t+1}dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}dt = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{t+1}dt$ d'après la relation de Chasles.

   Or la fonction intégrée est positive (une racine carrée multipliée par une exponentielle). Donc l'intégrale est positive. Par conséquent $J_{n+1} - J_n > 0$, ce qui signifie que J est croissante.

2. $$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt$$

(a) Pour tout $t \geq 1$, on a $(\sqrt{t+1})^2 = t + 1 \geq 0$. Donc pour tout $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{t+1} \leq t+1 &\Leftrightarrow \sqrt{t+1} \leq (\sqrt{t+1})^2 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{t+1} \text{ (On divise par un nombre positif)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{0+1} \leq \sqrt{t+1} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq t+1 \text{ (Par croissance de la fonction racine carrée sur} [0; +\infty[) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq t \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie (on voit même qu'elle est vraie pour tout $t \geq 0$).

(b) Pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t + 1$. De plus, $e^{-t} \geq 0$, donc $e^{-t}\sqrt{t+1} \leq (t+1)e^{-t}$, puis pour tout $n \geq 1$, l'intégrale préservant l'inégalité, $\int_1^n \sqrt{t+1}e^{-t}dt \leq \int_1^n (t+1)e^{-t}dt$, soit $J_n \leq I_n$

(c) I_n se calcule par intégration par parties. Posons $u(t) = t+1$ et $v'(t) = e^{-t}$. Alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$, puis :
$I_n = [-(t+1)e^{-t}]_1^n - \int_1^n -e^{-t}dt = -(n+1)e^{-n} + 2e^{-1} - [e^{-t}]_1^n = -(n+1)e^{-n} + 2e^{-1} - e^{-n} + e^{-1} = -(n+2)e^{-n} + 3e^{-1}$.
Or pour $n \geq 1$, $-(n+2)e^{-n} < 0$ (l'exponentielle est positive, l'entier est positif). Donc $I_n < 3e^{-1}$. La suite I est donc majorée par $3e^{-1}$, qui ne dépend pas de n.
(En fait, on peut même prouver, d'une part comme pour J que I est croissante, d'autre part que cette suite I converge vers $3e^{-1}$).

(d) Puisque $J_n \leq I_n \leq 3e^{-1}$, on en déduit que J est majorée. Or nous savons qu'elle est croissante. Donc J est convergente (de limite indéterminée ici).