Chapitre 1

Nombres complexes

A Ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x+1=0$ n'a pas de solution.
  Cette équation a une solution notée -1 , cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
  $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
  $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x=1$ n'a pas de solution.
  Cette équation a une solution notée $-\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
  $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
  C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}^*$. $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2=2$ n'a pas de solutions.
  Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$.
  $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
  $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solutions.
  Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.
  C'est l'ensemble des nombres de la forme $a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
  $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

B Définition

1 Forme algébrique

Définition Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels.
- Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication prolongent celles des nombres réels (donc restent les mêmes pour les nombres réels).
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2=-1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit **de manière unique** $z=x+iy$ avec x et y réels.

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
x est la partie réelle de z, notée $\Re(z)$ ou $Re(z)$, y est la partie imaginaire de z notée $\Im(z)$ ou $Im(z)$.

Remarque $z = x + iy$ avec x et y réels :
Si $y = 0$, le nombre complexe est un nombre réel.
Si $x = 0$, le nombre complexe est dit imaginaire pur.

Théorème Soit x, y, x' et y' des nombres réels,
$x + iy = x' + iy'$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
$x + iy = 0$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

<u>**Exemple**</u> On Cherche l'écriture algébrique de $(5 + 2i)(2 - 4i)$. Pour cela on applique les règles de calcul connues :

$$\begin{aligned}
(5+2i)(2-4i) &= 5 \times 2 - 5 \times (4i) + 2i \times 2 - 2i \times 4i \\
&= 10 - 20i + 4i - 8i^2 \\
&= 10 - 16i - 8 \times (-1) = 10 - 16i + 8 \\
&= 18 - 16i
\end{aligned}$$

Cela signifie que l'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

2 Addition et multiplication

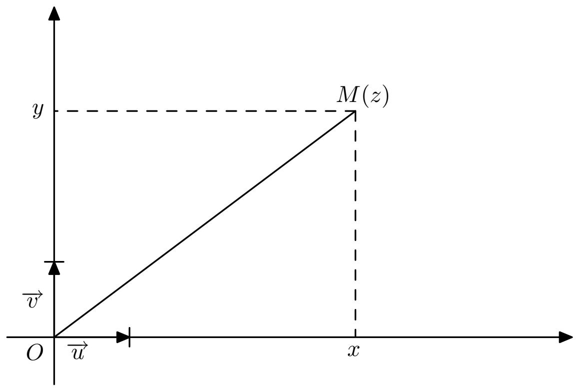
Définition Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' réels) deux nombres complexes.
La somme de z et de z' est le complexe $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
Le produit de z et de z' est $z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.
En effet $z.z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

Remarque Les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$. On a alors pour tous z et z' complexes,
$z^2 + z'^2 = z^2 - i^2z'^2 = (z - iz')(z + iz')$.
$\rightarrow$ **Exercices** 8,9,10p310 (trouver l'écriture algébrique)

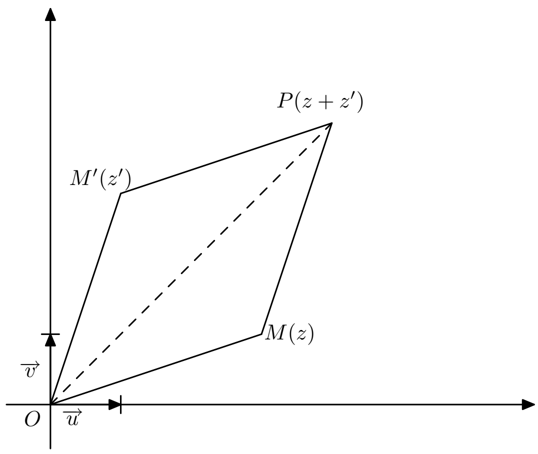
3 Représentation graphique

Soit $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal direct du plan.

1. A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réel, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$. On dit que M est le **point image** de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z.
2. Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'**affixe du point** M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
3. Le plan est alors appelé **plan complexe**.
4. L'axe des abscisses $(O; \overrightarrow{u})$ est appelé **axe des réels**, l'axe des ordonnées $(O; \overrightarrow{v})$ est appelé axe des **imaginaires purs**.



Remarque Soient M d'affixe z et M' d'affixe z' des points du plan complexe.
$z+z'$ est l'affixe du point P tel que $OMPM'$ est un parallélogramme.



Proposition (Affixe d'un vecteur) Soit deux points A et B du plan complexe ayant pour affixes respectives z_A et z_B.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Remarque Si λ est un réel, l'affixe de vecteur $\lambda\vec{u}$ est λz où z est l'affixe de $\vec{u}$.
→ **Exercices** 1,2,3p309 (affixes/points)
→ **Exercice** 6p309 (utilisation du vocabulaire : imaginaire, partie imaginaire,...)

C Inverse d'un nombre complexe non nul

Théorème Tout nombre complexe non nul z, écrit sous forme algébrique $z = x + iy$, admet un inverse, noté $\frac{1}{z}$, et :

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

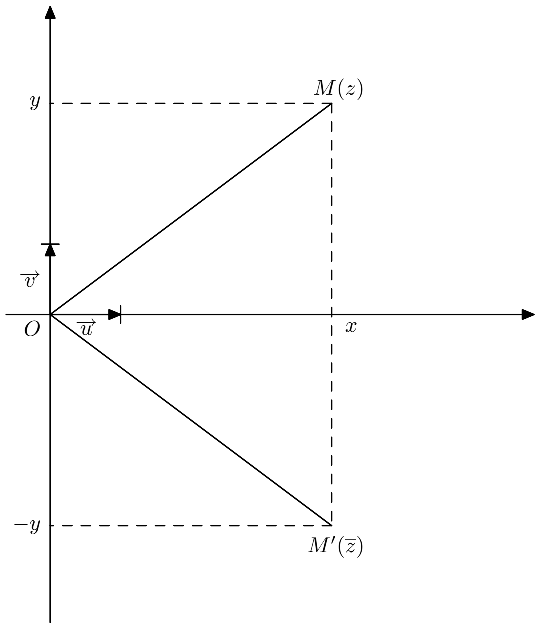
En effet, on remarque que pour tout nombre complexe non nul $z = x + iy$,
$(x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$ (qui est un nombre réel).

On a alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.
→ **Exercice** 12p310 (donner l'écriture algébrique d'un inverse)
→ **Exercice** 13p310 (écriture algébrique d'expressions formée à partir de deux nombres complexes)

D Nombre conjugué

Définition Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$.
Le **nombre conjugué** de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $x - iy$.

Dans le plan complexe, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Proposition Soit z un nombre complexe.

1. z est réel équivaut à $\bar{z} = z$.
2. z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$.

Preuve : On pose $z = x + iy$, avec x et y réels :

1. Si z est réel, alors $y = 0$, donc $z = \bar{z}$.
2. Si $z = \bar{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $2iy = 0$ et on en déduit que $y = 0$ ce qui signifie que z est réel.
3. Si z est imaginaire pur, alors $x = 0$, donc $z = -\bar{z}$.
4. Si $z = -\bar{z}$, alors $x + iy = -x + iy$, donc $2x = 0$ et $x = 0$. z est donc bien un imaginaire pur.

□

Proposition Soit z l'affixe d'un point M dans le plan complexe.

1. $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
2. $-z$ est l'affixe du symétrique de M par rapport au point O.
3. $-\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

Proposition Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'} \qquad \bar{\bar{z}} = z$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'} \qquad \text{pour } z \neq 0,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\text{pour } z' \neq 0,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{Z},\ \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

Remarque Pour tout nombre complexe z, on a les relations $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

→ **Exercice** 25p311 (conjugué d'expressions complexes)

→ **Exercice** 24p310 (somme réelle, soustraction imaginaire), 28p311 (forme algébrique, résolution dans $\mathbb{C}$)

E Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations du second degré à coefficients réels

→ **Exercice** 61p313 (échauffement : racine carrée dans $\mathbb{C}$)

Proposition L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discrimant du trinôme.

1. Si $\Delta = 0$: une solution réelle égale à $-\dfrac{b}{2a}$
2. Si $\Delta \neq 0$: deux solutions distinctes :
   - réelles si $\Delta > 0$: $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
   - complexes conjuguées si $\Delta < 0$: $\dfrac{-b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Preuve : La forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) est $a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les résultats vus en première.

Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. On pose $\delta = -\Delta$. On peut écrire $\delta = (\sqrt{\delta})^2$

On a alors : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right]$

$az^2 + bz + c = a\left(z + \dfrac{b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)\left(z + \dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)$.

Les solutions de l'équation sont donc :

$$-\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

□

→ **Exercices** 62p313 (basique), 65p313 (avec produit), 68p314 ($Z = z^2$)

F Module et argument d'un nombre complexe

1 Définitions

Définition (Module) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle module de z le nombre :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il s'agit en fait de la distance OM où M est l'image de z.

dessin

Remarque
- le module généralise la valeur absolue aux nombres complexes. Ainsi, $|z| = 0$ est équivalent à $z = 0$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Définition (argument) Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M. On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté :

$$\arg(z) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM})$$

Il est unique à 2π près (si θ est un argument, $\theta + 2k\pi$ en est un pour tout $k \in \mathbb{Z}$).

Dessin

Définition (Coordonnées polaires) Dans le plan complexe, tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$, mais aussi par ses coordonnées polaires (r, θ), où $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM})$. On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Dessin

Définition (Forme trigonométrique) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe d'image M. Puisque $OM = |z|$ et $\theta = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$, on a :

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La dernière expression est appelée forme trigonométrique de z.

Grâce à l'unicité de la forme algébrique, on a les propriétés :

Proposition Deux nombre complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à 2π près.

Proposition Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho > 0$. Alors $\rho = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$.

Remarque Soit $z = x+iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Pour déterminer un argument de z, on calcule d'abord son module, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a alors :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Il faut alors chercher un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\rightarrow$ **Exercices** 33,34,36p311, (40p312 à la calculatrice)

2 Propriétés

Proposition Soit z un nombre complexe. Alors :

1. $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
2. $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$.

Proposition Soit z un nombre complexe non nul.

1. z est réel pur si et seulement si $\arg(z) = 0$ ou π (à 2π près).
2. z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.

Proposition Soit z et z' des nombres complexes non nuls. Alors :

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
2. $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$.
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Preuve : Le premier point se retrouve en prenant un point de vue géométrique.
Prouvons le second point. Écrivons les formes trigonométriques de z et z' : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ Lorsque l'on fait le produit des deux, et en regroupant les termes développés, on a :

$$zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Or, $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$ et $\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' = \sin(\theta + \theta')$, d'où le résultat.
Le troisième point se fait par récurrence. Le dernier point utilise le second. □

Proposition Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points distincts du plan complexe. Alors :

1. $AB = |z_B - z_A|$
2. $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

Preuve : Il suffit de prendre un point de vue géométrique. □

Conséquence : si $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ sont quatre points du plan complexe deux à deux distincts, alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

En effet, d'après la relation de Chasles,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

→ **Exercices** 41,42p312
→ **Exercices** 45p312 (demi-droites) , 48p312 (trouver une valeur de cos inhabituelle)
Rappel d'une équation de cercle, de droite.
→ **Exercices** 38p311 (en DM), 44p312
→ **Exercice** 50p312 (application de la conséquence ci-dessus)

G Notation exponentielle

Activité Soit $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Déterminer la dérivée de f puis l'exprimer en fonction de f. Déterminer $f(0)$. Trouver une analogie avec une fonction connue.

Définition Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Exemple $e^{i0} = 1; e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Proposition Soit θ et θ' dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg e^{i\theta} = \theta$ ($e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ)
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre)

Preuve : le premier point vient de la définition. Les suivants viennent des propriétés de module et d'argument □

Remarque La formule de Moivre permet d'obtenir rapidement la forme algébrique d'une puissance d'un nombre complexe.

Définition Au lieu d'écrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, on peut l'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z)$, appelée **forme exponentielle** de z.

→ **Exercices** 52,53,55,56 p313
→ **Exercice** 57p313 (formules trigonométriques)

Proposition Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r. Alors $M(z) \in \mathscr{C}$ si et seulement si il existe un réel $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $z = \omega + re^{i\theta}$

Preuve :voir DM fait il y a quelques temps (rappel : $re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$) □

L'équation $z = \omega + re^{i\theta}$ est appelée équation paramétrique complexe du cercle $\mathscr{C}$.
→ **Exercices** 58,59p313

H Transformations

Soit F une transformation du plan géométrique. On lui associe la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout point $M(z)$ du plan complexe d'image $M'(z')$ par F, $f(z) = z'$.

1 Translation

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est $z' = z + z_{\overrightarrow{v}}$.
Preuve :$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si $z' - z = z_{\overrightarrow{v}}$. □
dessin

2 Homothétie

L'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \neq 0$ est $z' - \omega = k(z - \omega)$.
Preuve :on a $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ par définition. □
dessin
Rappel : le centre est un point invariant.

3 Rotation

L'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
Preuve :on a $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ par définition. Autrement dit, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ (si $z \neq \omega$) a pour module 1 et pour argument θ. Or $e^{i\theta}$ est l'unique nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Donc $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$. Si $z = \omega$, alors $z' = \omega$. Dans tous les cas, $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. □
dessin
Rappel : le centre est un point invariant, tout comme pour l'homothétie.
Voir page 301

4 Autres transformation

On a déjà vu la symétrie par rapport à l'axe des réels ($z' = \overline{z}$), la symétrie centrale ($z' = -z$, qui est à la fois une rotation et une homothétie).
→ **Exercices** 71, 74, 76 (détermination d'écritures complexes de transormations)
→ **Exercices** 72, 77, 78(c), 79, 80