Chapitre 1

Dérivation

A Rappels

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On dit que f est **dérivable en** a si il existe un réel L tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

Le nombre L est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et est noté $f'(a)$.
Si f est dérivable en a pour tout a dans I, on dit que f est **dérivable sur** I. On note alors f' la fonction définie sur I par

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Cette fonction est la **fonction dérivée** de f sur I.

Proposition Voir les fonctions dérivées des fonctions usuelles page 94

Proposition Soit u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :

1. la fonction $u + v$ est dérivable en I et $(u+v)' = u' + v'$
2. la fonction uv est dérivable en I et $uv = u'v + uv'$
   En particulier :
   (a) si $v = \lambda$ (λ réel donc fonction constante de dérivée nulle) : $(\lambda u)' = \lambda u'$
   (b) si $v = u$: $(u^2)' = 2uu'$
3. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
   en particulier (si $u = 1$) : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

→ **Exercices** 6,7,9p110 (calculs de dérivée)
Activité fiche sur la fonction tangente

B Approximation affine

Proposition Soit f définie sur un intervalle I contenant un réel a telle que f est dérivable en a. Alors la courbe représentative de f admet une tangente en $(a; f(a))$ définie par l'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe ($f'(a)$) nous donnant l'évolution de la fonction, on a la propriété :

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

1. Si $f'(x) > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I
2. Si $f'(x) < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I
3. Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I

Remarque Pour les deux premiers cas, si f' s'annule en un nombre fini de points de I, cela ne change pas la stricte monotonie de f.
Voir :p96 : extremum local

Remarque (et définition) En $x = a + h$, l'équation de la tangente nous donne $y = f'(a)h + f(a)$. C'est **l'approximation affine** de $f(a + h)$ pour h proche de 0 associée à la fonction f.

Proposition Si f est dérivable en un réel a de I, alors il existe une fonction ϵ telle que $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$

Écriture différentielle : On a $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\epsilon(h)$ d'après la propriété précédente. En physique on note $\Delta y = \Delta x f'(a) + \Delta x \epsilon(\Delta x)$.
Δy représente la variation en ordonnée, Δx représente la variation en abscisse ($(x + h) - x = h$). Lorsque Δx (autrement dit h) tend vers 0, $\epsilon(\Delta x)$ devient 'négligeable'. Les variations devenant très petites, on échange le Δ en d. On exprime alors de façon symbolique :

$$dy = f'(a)dx$$

Il s'agit de **l'écriture différentielle** (due à Leibniz).

Remarque Parfois on va jusqu'à noter $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$
→ **Exercices** 15p110 (signe de f' à partir du graphe de f), 16p110 (variation de f à partir du graphe de f')
→ **Exercice** 17p110 (étude de fonction)

C Dérivation d'une fonction composée

Proposition Soit v une fonction dérivable sur I, à valeurs dans J. Soit u dérivable sur J. Alors la fonction composée $u \circ v$ est dérivable sur I et :

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$$

Idée de preuve : ...

Remarque Un moyen mnémotechnique pour retrouver la formule : on utilise la notation $y = v(x)$ et $Y = u(y)$. Alors $dy = v'(x)dx$ puis $dY = u'(y)dy = u'(v(x))v'(x)dx$
En conséquence on obtient les formules suivantes :

Proposition Soit u dérivable sur I. Alors les fonctions suivantes sont dérivables sur I de dérivée :

fonction	dérivée
u^n $(n \geq 2)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$ (si $u > 0$)	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$
$\tan(u)$	$u' \times [1 + \tan^2(u)]$

→ **Exercices** 26p112, 27p112 (calculs de dérivées)