Chapitre 1

Continuité

Activité 1p120 (lien entre la non existence d'une limite et le "lever de crayon")

A Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que f est continue en a si f admet une limite en a égale à $f(a)$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

Remarque Graphiquement, une fonction est continue s'il n'est pas nécessaire de lever le crayon pour tracer sa courbe représentative.

Proposition Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve : Puisque f est dérivable en a, il existe une fonction φ telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$. Donc $\lim_{h\to 0}(hf'(a)+h\varphi(h)) = 0$ et $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Autrement dit, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Donc f est continue en a. □

→ **Exercices** 1,2,3,4p135

▲ La réciproque est fausse : une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point. C'est le cas par exemple de la fonction racine carrée en 0.

→ **Exercices** 6, 7p136

Fonctions continues usuelles : les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielle sur $\mathbb{R}$. Les fonctions inverse et racine carrée sur leur ensemble de définition.
Les fonctions obtenues par opération usuelle ou par composition à partir fonctions précédentes sont continues sur leurs ensembles de définition.

Exemple La fonction « partie entière » est un exemple de fonction non continue en certains points. On définit pour tout x la partie entière $E(x)$ par $E(x) = n$ où n est l'entier relatif tel que $n \leq x < n+1$. (autrement dit, si $x \in [n; n+1[$, $E(x) = n$). Cette fonction n'est continue en aucun nombre $z \in \mathbb{Z}$.

dessin

→ **Exercices** 8,11p136

B Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 4p121 (approcher les conditions du théorème)

Théorème (Valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe au moins un réel x compris entre a et b tel que $f(x) = k$.

Autrement dit, quel que soit k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a **au moins** une solution.
f prend toutes les « valeurs intermédiaires » entre $f(a)$ et $f(b)$.
En particulier : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, alors f s'annule au moins une fois entre a et b.

dessin

→ **Exercices** 12,13,14p136

Théorème Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$, alors quel que soit k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel x compris entre a et b tel que $f(x) = k$.

Preuve : L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité est laissée en exercice.
Lire : page 126, extension à des intervalles ouverts bornés ou non.
→ **Exercices** TD 4p129 (balayage) (et 5p130 (dichotomie))
→ **Exercices** 17,20,19p137, 28p138