# Chapitre 1

# Récurrence

**Activité** fiche exemple et définition.

**Proposition (Principe de récurrence)** Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (au moins à partir d'un certain rang $n_0$). Si :
– La propriété est **initialisée** à un certain rang $n_0$ (C'est-à-dire : $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie)
– La propriété est **héréditaire** à partir du rang $n_0$ (C'est-à-dire : pour tout $n \geq n0$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$)
Alors la propriété est vraie à tout rang plus grand que $n_0$.

**Exemple** lire page 202 en entier
→ **Exercices** 1 à 11 pages 217 et 218

## A Suites arithmétiques et géométriques

**Rappel** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si il existe un réel $r$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre $r$ est appelée la raison de la suite.

**Proposition** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$.

**Preuve :**Par récurrence, prouvons que $\mathscr{P}(n)$ : $u_n = u_0 + n \times r$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Initialisation : Soit $n_0 = 0$. Alors $u_0 = u_0 + 0 \times r$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
2. Étape de récurrence : Soit $n \geq 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Prouvons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a :

   $$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + n \times r + r = u_0 + (n+1) \times r$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

**Rappel** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométique si il existe un réel $r$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r \times u_n$. Le nombre $r$ est appelé la raison de la suite.

**Proposition** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométique de raison $r$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times r^n$.

**Preuve :**Par récurrence, prouvons que $\mathscr{P}(n)$ : $u_n = u_0 \times r^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Initialisation : Soit $n_0 = 0$. Alors $u_0 = u_0 \times 1 = u_0 \times r^0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
2. Étape de récurrence : Soit $n \geq 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Prouvons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a :

   $$u_{n+1} = r \times u_n = r \times u_0 \times r^n + r = u_0 \times r^{n+1}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

## B Suites monotones bornées

→ **Exercices** 14,15,17,20p219

**Proposition** Soit $u$ une suite.
- Si $u$ est croissante et majorée, alors $u$ est convergente ;
- Si $u$ est décroissante et minorée, alors $u$ est convergente.

**Preuve :**Admis. □

**Remarque** la propriété n'indique pas la valeur de la limite.
On a une réponse dans le cas des suites définies par récurrence :

**Proposition** Soit $u$ une suite définie par récurrence, c'est à dire telle qu'il existe une fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u$ converge et si $f$ est continue, alors la limite $l$ de $u$ est telle que $f(l) = l$.

**Preuve :** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Or $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$ car $f$ est continue, donc par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(l) = l$. □

**Exemple** voir 2 page 207 (choix du nombre $l$).
→ **Exercices** 24p219, 27p219

## C Suites adjacentes

**Définition** On dit que deux suite $u$ et $v$ sont adjacentes si :
- $u$ est croissante ;
- $v$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

**Proposition** Si $u$ et $v$ sont adjacentes avec $u$ croissante et $v$ décroissante, alors pour tout $n$, $u_n < v_n$.

**Preuve :** On pose $w_n = u_n - v_n$. Comme $u$ est croissante et $v$ est décroissante, alors $w$ est croissante. De plus, $w$ a pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Supposons qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $w_p > 0$. Comme $w$ est croissante, alors pour tout $n > p$, $w_n > w_p > 0$, ce qui contredit que la limite de $w$ est 0. Ainsi, il n'existe pas de $p \in \mathbb{N}$ tel que $w_p > 0$. Ainsi, pour tout $n$, $u_n \leq v_n$.

**Proposition** Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

**Preuve :** Deux suites adjacentes sont monotones et bornées ($u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$), donc sont convergentes. Elles sont donc convergentes. Soit $l$ et $l'$ leurs limites. Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = l - l'$. Donc $l = l'$. □

**Remarque** Si l'on prouve que $u$ et $v$ sont adjacentes et si l'on trouve un réel $m$ tel que $u_n \leq m \leq v_n$, alors $m = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
**Activité** 2p200 en heure de groupe.
→ **Exercices** 28p219 , 35p221
→ **Exercices** 30p220