Chapitre 1

Limites

Activité Exercices page 56.

A Limites de suites

Définition (limite infinie) Dire qu'une suite u a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) signifie que :
pour tout A réel, il existe un rang à partir duquel tous les termes de u sont supérieurs à A (resp. inférieurs à A).
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $-\infty$).
On dit aussi que u tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).
Définition On dit qu'une suite est majorée (resp. minorée) si il existe un réel M (resp. m) tel que pout tout n, $u_n < M$ (resp. $m < u_n$).
On dit qu'une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée (ses termes sont compris entre deux constantes).

<u>**Exemple**</u> Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, la suite est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée.
Proposition Soit u une suite croissante et non majorée. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Soit u une suite décroissante et non minorée. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
Preuve : Soit A un réel... □
Définition (limite finie) Soit u une suite et l un réel. On dit que u a pour limite l si, pour tout intervalle ouvert contenant l il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, et on dit que u est **convergente** vers l.
Définition Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

<u>**Exemple**</u> C'est en particulier le cas des suites qui ont une limite infinie. Mais également le cas de la suite u telle que $u_n = (-1)^n$.
→ **Exercices** 1,2,4,6p80

B Limites de fonctions

1 Limites à l'infini ou en un réel

Soit f une fonction, soit l un réel.

Définition Dire que f a pour limite l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, et on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.

La droite d'équation $y = l$ est alors une asymptote (horizontale) à la courbe de f.

Définition Dire que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ signifie que quel que soit le réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $f(x) > A$ (resp. pour tout $x < x_0$, $f(x) < A$).

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), et on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Définition (Asymptote oblique) On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique pour la courbe de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

→ **Exercices** 7,9,10 p80
Limite d'une fonction en un réel : lire page 64.

Définition La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si la limite de f en a est infinie.

2 Limites par comparaison

Théorème (des gendarmes) Soit f, g et h des fonction et l un réel. Si :
– $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$;
– pour $x > x_0$ assez grand, $g(x) <\leq f(x) \leq h(x)$.
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Preuve : Soit I un intervalle ouvert contenant l. Par hypothèse, et d'après la définition de limite finie à l'infini, pour x assez grand, $g(x)$ et $h(x)$ se trouvent dans cet intervalle. Or pour x assez grand, $f(x)$ est compris entre $g(x)$ et $h(x)$. Donc $f(x)$ est compris dans I. (Voir page 66 une preuve plus propre) □

Proposition Soit f et g deux fonctions. Si pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Preuve : Soit A un réel. Par hypothèse et définition, pour x assez grand, $g(x) \geq A$. Or pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$. Donc pour x assez grand, $f(x) \geq A$. D'où le résultat. (Voir page 66 une preuve plus propre)

Remarque il y a une propriété analogue pour les limite en $-\infty$.
→ **Exercices** 16,17,18

3 Opérations sur les fonctions

Fiche récapitulative.
Composition : voir livre page 70.
→ **Exercice** 1p58 (nombre dérivé sou forme de limite de fonction en 0)
→ **Exercices** pages 82 et 83 (un maximum)

C Croissances comparées

Nous avons déjà vu les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On peut comparer ln et exp à l'infini, car pour $x > 1$, $\dfrac{e^x}{\ln x} = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{\ln x}$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

Comparons maintenant les fonction exponentielles et logarithmes avec les puissances de x :

Proposition Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Preuve : $\dfrac{e^x}{x^n} = e^{x - n\ln(x)} = e^{x(1-n\frac{\ln(x)}{x})}$ (car $x^n = e^{n\ln x}$). Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-n\dfrac{\ln(x)}{x}) = 1$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Pour la limite en $-\infty$, on fait le changement de variable $X = -x$

Pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$, on écrit que $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{1}{n}\dfrac{\ln(x^n)}{x^n}$ et on fait le changement de variable $X = x^n$. □

→ **Exercices** 25,26,27,29,30,34,37p191