Chapitre 1

Probabilités

A Probabilités conditionnelles

Activité QCM p384 (rappels de probabilités, variables aléatoires et proportions sur tableau à double entrée)
Activité 1p386 (recherche d'une formule)
Définition Une loi de probabilité est définie sur un ensemble E. Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de l'événement « B sachant A », notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Remarque Si l'on connaît $P(A)$ et $P_A(B)$, on peut alors calculer $P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$.
→ **Exercices** 1,2,3,4,5,6p401-2
Représentation par un arbre pondéré : voir page 388

B Indépendance

Définition (Indépendance de deux événements) Deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Conséquences de la définition :
- Si A et B sont de probabilité non nulle et indépendants, alors

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \text{ et } P_B(A) = P(A)$$

- Si A et B sont incompatibles et de probabilité non nul, alors ils ne sont pas indépendants car $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$.

→ **Exercices** 7,8,9,10p402
→ **Exercice** 17p403
Définition (Indépendance de deux variables aléatoires) Soit X et Y deux variables aléatoires sur E. On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les valeurs prises par Y. Dire que X et Y sont indépendants signifie que pour tous i et j, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.
→ **Exercices** 11,12p402-3

C Formule des probabilités totales

Activité 3p387

Définition Dire que les événements B_1, B_2,..., B_n forment une partition de E signifie qu'ils sont incompatibles et que leur réunion est E.

Théorème Si les événements B_1, B_2,..., B_n forment une partition de E, alors pour tout événement A,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n) \\ &= P_{B_1}(A)P(B_1)+P_{B_2}(A)P(B_2)+\cdots+P_{B_n}(A)P(B_n) \end{aligned}$$

En effet, les événements $A\cap B_i$ sont incompatilbles et leur union est A.
Ce théorème permet d'illustrer l'idée selon laquelle chercher la probabilité d'un événement (complexe) c'est partitionner cet événement en plusieurs événements simples (c'est à dire dont on connaît la probabilité rapidement) et incompatibles deux à deux.

Exemple voir exemple p390
→ **Exercices** 14,15,16p403
→ **Approfondissement** 18p403, 21p404, 24p404, 28p405

D Combinaisons

Activité 1p412

Définition Soit n un entier naturel. Le nombre factoriel n, noté $n!$, désigne le produit de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n. Autrement dit,

$$n! = 1\times 2\times ...\times (n-1)\times n$$

Exemple $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$. (voir calculatrice MATH).

Définition Soit n et p des entiers avec $0\leq p\leq n$. Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E contenant exactement p éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

On dit que $\binom{n}{p}$ est le nombre de combinaisons de p éléments de E. On le lit « p parmi n ».

Preuve : Le nombre de suites ordonnées de p éléments de E est $n(n-1)\dots(n-(p-1))$
Or, pour chaque ensemble contenant p éléments de E, il y a $p!$ suites ordonnées possibles.
On a donc bien $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$. □
Remarque : le nombre de facteurs au numérateur est $(p-1)-0+1=p$.

Exemple $\binom{5}{3} = \dfrac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1} = 10$.

Proposition On l'égalité :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve : (rapide) □
Cette formule contient beaucoup plus de facteurs, mais peut être plus simple à manipuler.
→ **Exercices** 1,2,3,4,6,7p431, 11,12p432 (probas), 13p432 (géom)
Proposition

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Preuve : À tout ensemble à p éléments on associe un unique ensemble à $n-p$ éléments de E. Leur nombre est donc le même. □
Proposition

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Cette égalité permet de construire le **triangle de Pascal**.
Proposition Soit a et b deux réels et n un entier. Alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

Preuve : Une récurrence désagréable. □

Exemple $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. On retrouve les identitées remarquables connues. On trouve donc les coefficients avec le triangle de Pascal.
→ **Exercices** 14,15,17p432

E Deux lois de probabilité discrètes

1 Loi de Bernoulli

Activité 2p412
Définition Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues :
– l'une appelée succès, de probabilité p ;
– l'autre appelée échec, de probabilité $1-p$.
La loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

issue	succès	échec
Probabilité	p	$1-p$

Exemple On tire une carte, on appelle succès « obtenir un as ». Alors $p = \frac{1}{8}$.

2 Loi binomiale

Définition Un shéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identique dans des conditions indépendantes (l'issue d'une épreuve ne dépend pas des précédentes épreuves).

Exemple on répète l'épreuve définie plus haut deux fois. On peut représenter ce shéma à l'aide d'un arbre. Donner la probabilité d'avoir $(s; e)$

Proposition Soit un shéma de Bernoulli comportant n épreuves de Bernoulli de paramètre p. Soit X la variable aléatoire, qui à chaque liste de n résultats compte le nombre de succès. On a alors, pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(X = k) = n \times \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Preuve : La probabilité d'une branche contenant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs) est $p^k \times (1-p)^{n-k}$ par indépendance des épreuves. Le nombre de telles branches est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments (la position des k succès parmi les n épreuves), donc $\binom{n}{k}$. D'où le résultat. □

Définition La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

Proposition

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

Preuve : Admis. □

→ **Exercices** 19,20,21,22p433, 25p434 (marche aléatoire)

F Lois continues

1 Définition générale

Activité 3 et 4 p413

On peut définir des lois de probabilités sur des intervalles plutôt que sur des ensembles finis. On appelle ces lois des lois continues.

Définition Soit $I = [a; b]$. Soit f une fonction continue sur I telle que $\int_a^b f(x)dx = 1$. On définit la loi de probabilité sur I de densité f par : pour tout c et d ($c \leq d$) inclus dans I,

$$\mathbb{P}([c; d]) = \int_c^d f(x)dx$$

Remarque on définit la probabilité d'être dans un intervalle ouvert ou semi-ouvert par la même intégrale. En effet, la probabilité d'obtenir une valeur précise est en fait nulle.

Définition Dans le cas où $I = [a; +\infty[$, il faut que f vérifie que $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = 1$, et l'on a $\mathbb{P}([c; +\infty[) = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_c^t f(x)dx$.

Remarque on obtient les même propriétés que pour les probabilités sur un ensemble fini. Autrement dit,

– si J et J' forment une partition de I, alors

$$\mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(J \cup J') = \mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(J') = 1$$

– Soit J et K deux intervalles contenus dans I tels que $\mathbb{P}(J) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_J(K) = \dfrac{\mathbb{P}(J \cap K)}{\mathbb{P}(J)}$ est la probabilité de K sachant J.

→ **Exercices** 26,27,37p434

2 Exemples de lois continues

a Loi uniforme sur $[0;1]$

La loi uniforme sur $[0;1]$ est la loi définie sur $[0;1]$ qui admet pour fonction densité la fonction f définie par $f(x)=1$. On a alors pour tous c et d $(c \leq d)$ inclus dans $[0;1]$, $\mathbb{P}([c;d]) = d-c$
$\rightarrow$ **Exercices** 28,29,35p434

b Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif) est définie sur $[0;+\infty[$ et a pour densité la fonction f définie par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.
Pour tous c et d $(c \leq d)$ inclus dans $[0;+\infty[$,

$$\mathbb{P}([c;d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

Comme $e^0 = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$, on a bien $\mathbb{P}([0;+\infty[) = 1$.
$\rightarrow$ **Exercices** 30,31,32,33p434