Chapitre 1

Logarithme

A Définition et conséquences

Activité p144 (définition, approche)

Définition La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe le réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x.

Autrement dit :
- Pour tout $x > 0$ et y réel, $x = e^y$ équivaut à $\ln(x) = y$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.

Note : On dit que l'exponentielle et le longarithmes sont les fonctions inverses l'une de l'autre.

<u>**Exemple**</u> Voici trois exemples à retenir :
- $\ln(1) = 0$ car $1 = e^0$, donc $\ln(0) = \ln(e^0) = 0$
- $\ln(e) = 1$ car $e = e^1$, donc $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- Pour tout λ réel, l'équation $\ln(x) = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$

Proposition Les courbes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition La fonction ln est strictement croissante.

Preuve : Soit $0 < a < b$. Alors, puisque pour tout $x > 0$, $x = e^{\ln(x)}$, $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$. Or la fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\ln(a) < \ln(b)$. □

Courbe de la fonction

Conséquence : Pour tous réels a et b strictement positifs, et tout comme pour la fonction exponentielle :
- $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$
- $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$ (en particulier, $\ln(a) < 0$ équivaut à $0 < a < 1$)

→ **Exercices** 1p161, 2 et 3 p161 (équations)
→ **Exercices** 4,6,7,8 p161 (inéquations) et 11p162, 13p162 (en TD)

B Propriétés

Théorème Pour tous a et b réels strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Preuve :Équivalences en passant par l'exponentielle. □

Théorème Pour tout $b > 0$, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

Preuve :Équivalences en passant par l'exponentielle. □
Conséquence : Les deux derniers théorèmes permettent d'établir que pour tous a et b strictements positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
Note : On dit parfois que le logarithme transforme le produit en somme. (Alors que l'exponentielle transforme la somme en produit).
Autres conséquences : Par récurrence, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ et $a_1, \ldots, a_n$ strictement positifs,

$$\ln(a_1 \times \cdots \times a_n) = \ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

le nombre n peut également être un entier relatif pour la dernière égalité.

Proposition Pour tout $a > 0$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Preuve : Pour tout $a > 0$, $\sqrt{a}^2 = a$. Donc $\ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$. Or d'après l'égalité ci-dessus, $\ln(\sqrt{a}^2) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où l'égalité.
→ **Exercices** 18,17,16,14,15p162
→ **Exercices** 21,22p162 (retour d'équations et inéquations)
→ **Exercices** 24p162, 29p163 (en TD)

C Étude de la fonction

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

Preuve : Soit A un réel. Comme ln est strictement croissante, pour tout $x > e^A$, $\ln(x) > \ln(e^A) = A$, d'où la première limite.
On fait un changement de variable pour l'autre limite : $X = \frac{1}{x}$. On a $\ln(x) = -\ln(X)$. □

Théorème La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Preuve : On admet qu'elle est dérivable. Partant de là, en notant $x = e^{\ln(x)}$ et en dérivant de deux manières, On trouve $1 = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$. D'où le résultat. □
Conséquence : La fonction ln est dérivable, donc elle est continue sur $]0; +\infty[$.
Une limite à connaître :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

C'est le nombre dérivé de ln en 1...
→ **Exercices** 31,32,33,35p163 (limites)
→ **Exercices** 36,37,38,39p163 (dérivation)
→ **Exercice** 42p163 (en TD ?)

Proposition Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$. $\ln(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$. Si u est dérivable sur I, alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Preuve : C'est une composée de fonctions... □

Exemple $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$ est défine sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $2x^2 + 4 > 0$ pour tout x) et

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2 + 4}$$

→ **Exercices** 47,48p164 (limites)
→ **Exercices** 51,52,53p164 (dérivées)

D Logarithme décimal

En DM