Chapitre 1

Produit scalaire

A Rappels

Définition Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et ont le même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA \times OB$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et sont de sens contraire, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -OA \times OB$.
- Soit A' le projeté orthogonal de A sur (OB) et B' le projeté orthogonal de B sur (OA).
  Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA' \times OB = OA \times OB'$.

Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Proposition
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Si $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ dans un repère orthonormé, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 - AB^2\right)$.
- Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et tout réel k,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \qquad (k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \qquad \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Définition On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si :
- soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
- soit, lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ sont non nuls, $(OA) \perp (OB)$.

Proposition Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Théorème (d'Al-Kashi) Dans un triangle ABC, avec les notations habituelles,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Théorème (de la médiane) Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

→ **Exercices** 1,2,4,5p343
→ **Exercices** 10,11,13p344

B Orthogonalité et conséquences

On munit le plan d'un repère orthonormal $(0; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

Définition Dire qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite (d) signifie que la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à celle de (d).

Autrement dit, soit A un point de (d), alors (d) est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Proposition Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b)$ a une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où c est un réel.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b)$.

Preuve : Voir cours de première. □

Proposition Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et A un point de coordonnées $(x_A; y_A)$.
La distance de A à (d) est donnée par la formule :

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Preuve : On cherche les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur (d) en fonction de celles de A et de $\overrightarrow{n}$, en utilisant le fait que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. On utilise ensuite le fait que H est sur (d), ce qui permet de déterminer le coefficient. On détermine enfin la norme du vecteur $\overrightarrow{AH}$. □

Proposition

1. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

2. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Preuve : Évident. □

→ **Exercices** 15,16p345 (triangles et hauteurs, médiatrices)
→ **Exercices** 23p345 (cercle et droites tangentes - deux manières de résoudre)

C Produit scalaire dans l'espace

1 Projeté orthogonal

Activité 3p322-3 (et lire 1p322 sans le faire)

Définition (projeté orthogonal sur un plan) Soit $\mathscr{P}$ un plan et M un point de l'espace. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est le point M', intersection du plan $\mathscr{P}$ avec la droite Δ_M passant par M et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

Dessin

Définition (projeté orthogonal sur une droite) Soit $\mathscr{D}$ une droite et M un point de l'espace. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$ est le point M'', intersection de $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ passant par M et perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Dessin

2 Définition du produit scalaire

Définition (Produit scalaire dans l'espace) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ vu comme produit scalaire dans un plan $\mathscr{P}$ contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Ce qu'il est important ce voir, c'est que ce produit ne dépend pas du choix du plan contenant les vecteurs. Ceci vient du fait que si A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Et si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A'C'}$, alors

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}(A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

car ABC et $A'B'C'$ sont superposables. □

→ **Exercices** 26,27p345 (projetés orthogonaux)
→ **Exercices** 29,30p345 (produits scalaires dans un cube)

3 Expressions et règles de calcul

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
La définition du produit scalaire dans l'espace se ramenant à celle dans un plan, on a l'expression déjà connue :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$$

Ainsi que celle utilisant le projeté orthogonal (voir page 330).

Proposition Si dans le repère orthogonal d'origine O, $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$, alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Preuve : Provient de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(OM^2 + ON^2 - MN^2)$ ($\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ON}$). □

Les règles de calcul sont les mêmes que pour le produit scalaire dans le plan (symétrique et linéaire).
→ **Exercice** 33p346 (conseiller de faire les suivants).

4 Orthogonalité et conséquences

Lire cours page 332, donnant les définition d'orthogonalité.
Soit a, b et c trois nombres non tous nuls.

Proposition Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

où d est un réel.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$.

Preuve : Le plan passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, et on trouve l'équation.
Pour la réciproque, on prend $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ (si $a \neq 0$), qui permet d'exprimer une égalité de type $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
□

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant une inéquation du type $ax + by + cz + d \geq 0$ (resp > 0) est appelé un demi-espace fermé (resp. ouvert) délimité par le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Proposition En définissant la distance d'un point à un plan comme la distance du point au projeté orthogonal du point sur le plan,
si, dans un repère orthonormal, un plan pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point A a pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$, alors la distance de A à $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$\frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve : Similaire à la preuve dans le plan pour la distance d'un point à une droite. □

→ **Exercices** 37,38 p346 (orthogonalité)
→ **Exercice** 42p347 (ensemble de points de l'espace)
→ **Exercices** 43,44,46,47,51p347 (plans et équations)
→ **Exercice** 55p347 en DM