Chapitre 1

Intégrales

Activité p226 (suites adjacentes, signe de fonction, comparaison de courbes, aires)

Activité 3p229 avec le rappel : $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A Aire sous une courbe

Étant donné que certaines parties du plan ont une aire, nous admettons également que :
- si deux parties disjointes X et Y ont une aire, alors aire($X \cup Y$) =aire(X)+aire(Y).
- Si une partie X est incluse dans une partie Y, alors aire(X) $\leq$aire(Y).

Dessin

Proposition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle. Alors le domaine situé sous sa courbe (et au dessus de l'axe des abcisses) admet une aire.

Preuve : Admis. □

On peut encadrer cette aire par deux suites adjacentes, dont la limite est donc l'aire du domaine.

Dessin

B Intégrale d'une fonction continue et positive

On considère un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Soit K le point tel que $OIKJ$ est un rectangle. L'unité d'aire est alors l'aire du rectangle $OIKJ$.

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. L'intégrale de f sur $[a; b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine situé sous la courbe.

Remarque le symbole $\int$ représente une somme, $f(x)d(x)$ représente l'aire d'un rectangle de largeur (très petite) dx et de hauteur $f(x)$. La variable x est muette, c'est à dire :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

Exemple Cas évident de la fonction en escaliers.
Exemple Cas facile de la fonction affine.
$f(x) = 2x + 3$ sur $[1; 4]$: $\dfrac{(4-1)\times(f(4)-f(1))}{2} + (4-1)\times f(1) = \dfrac{3\times 6}{2} + 3\times 5 = 9 + 15 = 24.$
→ **Exercices** 1,2,3p245
Activité 1p228 (sauf 3., éventuellement en DM), nivellement de terrain.
Définition La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

L'interprétation graphique de cette valeur moyenne est que si on la note λ, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$.
Autrement dit l'aire sous la courbe est égale à celle du rectangle de hauteur λ (repenser à l'activité sur le nivellement de terrain).
On donne : $\displaystyle\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$
→ **Exercices** 4,6p245
→ **Exercices** 12,9,11p246 (14 en DM)
→ **Exercices** 16,18p246 (20 en DM) (valeur moyenne)

C Fonctions de signe quelconque

Définition Si f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$, on définit

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$$

Définition Dans le cas d'une fonction continue qui change de signe sur $[a; b]$, l'intégrale de f sur $[a; b]$ est la somme algébrique des intégrales de f sur les intervalles sur lesquels f est de signe constant.

Dessin

On convient que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

On donne la même définition de valeur moyenne pour la fonction continue que pour le cas d'une fonction continue positive.
→ **Exercices** 21,22,23p246, 25,27p247, 29p247

D Propriétés de l'intégrale

On admet que l'intégrale est linéaire, ce qui signifie :
Proposition
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx.$

On admet également la relation de Chasles :
Proposition

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

où a,b et c sont dans un intervalle où f est intégrable.
Il découle des définitions que :
Proposition

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$

On peut alors prouver :

Proposition Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Preuve : On utilise la fonction $f - g$, la propriété précédente et la linéarité. □

Proposition (Inégalité de la moyenne) Si il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Preuve : On utilise la propriété précédente, on calcule les intégrales simples, puis on divise par $(b-a)$. □

→ **Exercices** 31,33p247, 34p247
→ **Exercices** 36,37p248
→ **Exercices** 39p248 (signe), 40p248 (comparaison), 43p248 (inégalité de la moyenne)