# Chapitre 1

# Primitives

## A Définitions

**Définition** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ définie et dérivable sur $I$ telle que $F'(x) = f(x)$.

**Exemple** Soit $f(x) = 3x + 7$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x - 4$. La fonction $F$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a bien $F'(x) = 3x + 7$. Donc $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. C'est aussi le cas de la fonction $G$ définie par $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x + 8$.

**Proposition** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ ayant une primitive $F$ sur $I$. Alors l'ensemble des primitives de $f$ est l'ensemble des fonctions $G$ définies sur $I$ par $G(x) = F(x) + C$ où $C$ est une constante réelle.

**Preuve :** Les fonctions $G$ sont bien des primitives de $f$ car $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Réciproquement, soit $G$ une primitive de $f$. Alors $G - F$ est une fonction définie et dérivable sur $I$ telle que $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Ainsi, $G - F$ est une fonction constante, notons $G(x) - F(x) = C$. Alors $G(x) = F(x) + C$. □

**Remarque** Si une fonction admet une primitive, elle a donc une infinité de primitives, et deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.

**Proposition** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ qui admet une primitive sur $I$. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive $G$ de $f$ qui vérifie $G(x_0) = y_0$.

**Preuve :** Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Toutes les primitives de $f$ sur $I$ sont des fonctions $G$ définies sur $I$ par $G(x) = F(x)+C$ où $C$ est une constante. La condition $G(x_0) = y_0$ implique que nécessairement $C = y_0 - F(x_0)$. Donc la fonction $G$ définie sur $I$ par $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ vérifie les conditions. L'existence est donc démontrée. L'unicité vient de l'unicité de la constante $C$ une fois $F$ fixée. □

→ **Exercices** 1,2,3,4,5p273

## B Primitives usuelles

Voir et recopier les tableaux page 260.

→ **Exercices** 6,7,8 (sauf d.)p274 (sommes)

→ **Exercices** 9,10,11p274 ($u'u^n$)

→ **Exercices** 12,13,14p274 ($\frac{u'}{u^n}$)

→ **Exercices** 15p274 ($u'e^u$)
→ **Exercices** 18 (décomposition),20p275 (dérivée d'un produit, d'un quotient)

## C Intégrale et primitive

**Activité** 2p256

**Théorème** Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$ et si $a \in I$, alors la fonction $F$ définie sur $I$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$.

**Preuve :** La preuve n'est faite que dans le cas où la fonction $f$ est continue et croissante sur $I$.
On souhaite prouver que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in I$.
Soit $x_0 \in I$ et soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$.
Alors $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ d'après la relation de Chasles.
Comme $f$ est croissante, pour $t$ compris entre $x_0$ et $x_0 + h$, on a $f(t)$ compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ (l'ordre dépendant du signe de $h$).
D'après l'inégalité de la moyenne, on a donc $\dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.
Or, $f$ est continue, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc bien la limite souhaitée.
Ainsi, $F$ est dérivable sur $I$ et $F'(x_0) = f(x_0)$ pour tout $x \in I$. De plus, $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$
$F$ est bien l'unique primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $a$. □

**Remarque**
- Le théorème affirme entre autres que toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet donc une primitive sur $I$.
- L'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 est ln. On a donc $\ln(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t}dt$. L'existence de la fonction ln est ici justifiée (modulo le fait que l'on admette qu'une fonction continue est intégrable).

**Proposition** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Quelque soit la primitive $F$ de $f$ sur $I$, on a, quelque soit $a$ et $b$ dans $I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. On note :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$$

**Preuve :** $F$ et $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ étant deux primitives de $f$, il existe $C$ telle que : $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Comme $\int_a^a f(t)dt = 0$, on a $C = F(a)$, et par suite $F(b) = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a)$. D'où le résultat. □

→ **Exercices** 21,22,23p275 (calculs d'aires)
→ **Exercices** 25,27p275 (calculs d'intégrales)
→ **Exercice** 28p275 (variation de la primitive)
→ **Exercice** 29p275 (en DM)

## D Intégration par parties

**Théorème** Soit $u$ et $v$ deux fonction dérivables sur un intervalle $I$. On suppose $u'$ et $v'$ continues sur $I$. Alors quelques soient $a$ et $b$ dans $I$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

**Preuve :** C'est une utilisation de la formule suivante : $(uv)' = u'v + uv'$. Que l'on intègre de $a$ à $b$. En utilisant la notation définie à la section précédente, on obtient bien la formule.

**Exemple** Voir livre page 264 et 265. La difficulté de l'utilisation de cette formule est de bien choisir quelle est la fonction dérivée et quelle est l'autre.

$\rightarrow$ **Exercices** 30,31,32,33,34,35,36,37p276