# Chapitre 1

# Droites et plans de l'espace

## A Rappels

**Définition** Si le système pondéré $\{(A_1, a_1); \ldots ; (A_n, a_n)\}$ est tel que $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$, alors il existe un unique point $G$ tel que

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

Ce point est le barycentre du système pondéré. On note $G = Bar\{(A_1, a_1); \ldots ; (A_n, a_n)\}$.

**Proposition** Un système conserve son barycentre si l'on multiplie tous les poids $a_i$ par un même réel $k \neq 0$. Autrement dit,

$$Bar\{(A_1, a_1); \ldots ; (A_n, a_n)\} = Bar\{(A_1, ka_1); \ldots ; (A_n, ka_n)\}$$

**Théorème (Associativité)** Si $m = a_1 + \cdots + a_n \neq 0$ et $a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots_m \neq 0$,
si $G = Bar\{(A_1, a_1); \ldots ; (A_n, a_n)\}$, alors

$$Bar\{(A_1, a_1); \ldots ; (A_n, a_n); (B_1; b_1); \ldots ; (B_m, b_m)\} = Bar\{(G, m); (B_1; b_1); \ldots ; (B_m, b_m)\}$$

Autrement dit on peut remplacer un sous-système pondéré admettant un barycentre par son barycentre, affecté de la somme des poids des points du sous-système.

**Proposition** Si $G = Bar\{(A_1, a_1); \ldots ; (A_n, a_n)\}$, (avec $m = a_1 + \cdots + a_n \neq 0$) alors pour tout point $M$,

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = m\overrightarrow{MG}$$

**Proposition** Les coordonnées du barycentre d'un système pondéré se calculent comme la moyenne des coordonnées des points du système, affectés de leur poid. Par exemple ($m = a_1 + \cdots + a_n \neq 0$) :

$$x_G = \frac{a_1 x_{A_1} + \cdots + a_n x_{A_n}}{m}$$

→ **Exercices** 1,5,7p375

## B Caractérisations barycentriques

**Proposition** La droite $(AB)$ est l'ensemble des barycentres des points $A$ et $B$. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points $A$ et $B$ affectés de coefficients de même signe.

**Preuve** Cas de la droite : voir le livre.
Cas du segment : Si $M$ est un point de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq k \leq 1$. Alors $\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})$, soit $(1-k)\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$. Donc $M = Bar\{(A, 1-k); (B, 1)\}$. Or, $1-k > 0$, donc $A$ et $B$ sont affectés de coefficients de même signe.
Réciproquement, si $M = Bar\{(A, a); (B, b)\}$ avec $a+b \neq 0$ et $a$ et $b$ de même signe, alors $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. Donc $(a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB}$, soit

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

Comme $a$ et $b$ sont de même signe, $a+b$ est de même signe que $b$, et donc $\frac{b}{a+b} \geq 0$. De plus, $\frac{b}{a+b} \leq 1$ car :

- Si $a$ et $b$ sont négatifs, $b \geq b+a$ et donc $\frac{b}{a+b} \leq 1$ $(a+b < 0)$ ;
- Si $a$ et $b$ sont positifs, $b \leq b+a$ et donc $\frac{b}{a+b} \leq 1$ $(a+b > 0)$.

□

**Proposition** L'intérieur d'un triangle $ABC$ est l'ensemble des barycentres de $(A, a)$, $(B, b)$ et $(C, c)$ avec $a$, $b$ et $c$ non nuls et de même signe.

**Preuve :** Avec un dessin, à l'aide de segments et donc de la propriété précédentes. □

**Proposition** L'ensemble des points d'un plan $(ABC)$ est l'ensemble des barycentres des points $A$, $B$ et $C$.

**Preuve :** Similaire au cas de la droite. □
→ **Exercices** 9,10,13p376
→ **Exercice** 15p376 (en DM)

## C Droites de l'espace

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ un vecteur. La droite passant par $A$ et ayant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.
Autrement dit les coordonnées sont données par :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{array}\right.$$

**Définition** Le système $(S)$ est appelé représentation paramétrique de la droite.
Le paramètre est le réel $k$

Soit $\overrightarrow{n}(a; b; c)$ et $\overrightarrow{n'}(a'; b'; c')$ deux vecteurs non colinéaires. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans ayant respectivement les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ pour vecteurs normaux. Les équations cartésiennes de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Les deux plans n'étant pas parallèles, leur intersection est une droite. C'est l'ensemble des points qui vérifient :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$$

Le système $(S')$ est appelé un système d'équations cartésiennes, et il définit une droite.
Toute droite de l'espace peut être définie à l'aide d'une représentation paramétrique ou d'un système d'équations cartésiennes.
→ **Exercices** 16,17p376
→ **Exercices** 21p377
→ **Exercices** 24p377

## D Intersections entre plans et droites

Lire page 364 et page 366
→ **Exercice** 26,27p377
→ **Exercice** 29p377 (DM), 4p369