Chapitre 1

Équations différentielles

Définition Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une fonction et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction.

Exemple $y' = y$, $y' = y + 7$ ou $3y' + 2y = 4$.
Toute solution d'une équation différentielle est donc une fonction. On ajoute parfois à cette équation une condition initiale comme par exemple $y(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des réels.
Nous savons que l'équation différentielle $y' = y$ a une unique solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$: il s'agit de la fonction exponentielle.

A Équation différentielle $y' = ax$ $(a \neq 0)$

Soit a un réel non nul.
Ceci est un rappel (voir le chapitre sur l'exponentielle) :

Théorème Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f_k définies par $k_k(x) = ke^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Preuve : On vérifie que la fonction est bien solution.
Pour prouver que toute solution est de cette forme, on considère une fonction f qui est solution de l'équation différentielle et on considère la fonction g définie par $g(x) = f(x)e^{-ax}$. On a alors $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - ae^{-ax}f(x) = af(x)(e^{-ax} - e^{-ax}) = 0$. Ainsi g est constante, égale à un certain réel k. Ainsi $f(x) = ke^{-ax}$. □

Théorème Soit x_0 et y_0 des réels. Il existe une unique solution f de l'équation $y' = ay$ qui vérifie $f(x_0) = y_0$. Il s'agit de la fonction définie par $f(x) = y_0e^{a(x-x_0)}$.

Preuve : Une solution est définie par $f_k(x) = ke^{ax}$. Or $f_k(x_0) = y_0$ équivaut à $ke^{ax_0} = y_0$, donc nécessairement $k = y_0e^{-ax_0}$ et donc la solution est unique et est bien donnée par $f(x) = y_0e^{-ax_0}e^{ax} = y_0e^{a(x-x_0)}$. □

→ **Exercices** 1-6p50, 8-11p50-51

B Équation $y' = ay + b$

On suppose ici $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Théorème Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonction f_k définie par $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où k est un réel.

Preuve :

- On vérifie que f_k est solution de l'équation :
  $f_k'(x) = ae^{ax}$ et $af_k(x) + b = (ae^{ax} - b) + b = ae^{ax}$.
- Soit f une solution de l'équation $y' = ax + b$. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) + \dfrac{b}{a}$. On a alors $g'(x) = f'(x)$. Comme $f'(x) = af(x) + b$, on obtient que $ag(x) = af(x) + b = g'(x)$. Ainsi g est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Ainsi, g est est définie par $g(x) = ke^{ax}$ d'après la section précédente. Donc $f(x) = g(x) - \dfrac{b}{a} = ke^{ax} + \dfrac{b}{a}$.

□

Théorème Il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y' = ay + b$ qui vérifie $f(x_0) = y_0$. Elle est définie par $f(x) = (\frac{b}{a} + y_0)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

Preuve : On vérifie que f est bien solution de l'équation et vérifie $f(x_0) = y_0$. L'unicité vient du fait que toute solution est de la forme $ke^{ax} - \frac{b}{a}$ et que l'équation $ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$ a pour unique solution $k = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0}$.

$\rightarrow$ **Exercices** 13-18p51, 20-22p51

Activité 1p44 (démographie avec deux méthodes, équation différentielle et suite géométrique)