Chapitre 1

Polynômes du second degré

A Définitions

Définition On appelle fonction trinôme (du second degré) une fonction dont l'expression peut être écrite sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés, a étant non nul. Ces trois constantes a, b et c sont appelés coefficients du trinôme.

<u>**Exemple**</u> Si $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, f est une fonction trinôme dont les coefficients sont $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.
Ce que l'on peut étudier sur une fonction trinôme c'est :
– ses variations, pour tracer sa courbe
– Les valeurs de x qui annulent la fonction ($f(x) = 0$).
Pour aider à tracer la courbe et à chercher les racines de la fonction, on utilise le fait que la fonction puisse s'écrire autrement :

Proposition Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme du second degré. Alors :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2b}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ est appelé le **discriminant** de f),

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2b}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

B Représentation graphique

Activité 5p151 (tracé d'un trinôme sous forme canonique à partir de la fonction carré)

Théorème lire le théorème page 152 (dessins inclus) le sommet de la parabole est atteint en $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Exemple si $f(x) = 4x^2 - 8x + 2$, comme $a = 4 > 0$ et $-\frac{b}{2a} = 1$, on a :

Tableau de variation, $f(1) = -2$ est un minimum.

→ **Exercices** 13 à 18p165
Activité 3p149 (DM ?)

C Racines

Définition Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme. On dit qu'un réel x_0 est une racine de f si $f(x_0) = 0$.

Exemple si $f(x) = x^2 + 2x + 1$ alors -1 est une racine de f car $f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.
Activité 1p149
Proposition Si $c = 0$, on peut résoudre en mettant x en facteur : $ax^2 + bx = x(ax + b)$

Exemple $2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } 2x - 4 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2)$
Proposition Si $b = 0$, on peut résoudre directement

Exemple $3x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{3} = 9 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -3)$
De manière générale, si l'on arrive à écrire l'expression de f sous la forme d'un produit de facteurs du premier degrés, résoudre l'équation revient à résoudre deux équations du premier degré.

Exemple $(2x + 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (2x + 3 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0) \Leftrightarrow (x = \frac{-3}{2} \text{ ou } x = 2)$
Activité 2p149
→ **Exercices** 1 à 12 page 164 (un maximum)
Proposition (Détermination des racines, factorisation et signe)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
– Si $\Delta > 0$, f a deux racines,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et $f(x)$ peut se factoriser en : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. De plus, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

- Si $\Delta = 0$, f a une racine (dite double) : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$. $f(x)$ se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$. De plus, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine et l'on ne peut pas factoriser $f(x)$ et $f(x)$ est du signe de a

Exemple factoriser $f(x) = x^2 + 3x - 4$ et en déterminer le signe.
→ **Exercices** 19 à 25 page 165 (résolutions)
→ **Exercices** 32 à 36 page 165 (factorisations)
→ **Exercices** 39,41,45 page 166 (inéquations)
→ **Exercices** 55,57 p166-7 (vérification graphique), 66,67p168 (changement de variable).