Chapitre 1

Dérivation

A Nombre dérivé

Activité QCM p176, sauf question D : détermination de coefficients directeurs et équations de tangentes.

Définition Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie en a. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a. On suppose que $\mathscr{C}_f$ a une tangente $\mathcal{T}$ en A. On définit le nombre dérivé de f en a comme étant le coefficient directeur de $\mathcal{T}$. On note ce nombre $f'(a)$.

Exemple voir livre page 181

→ **Exercices** 12,13,15,16 p193 (détermination graphique)

Proposition Soit f une fonction définie en a dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ a une tangente $\mathcal{T}$ en le point d'abscisse a. Alors $\mathcal{T}$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve : L'équation est de la forme $y = \alpha x + \beta$. Or son coefficient directeur est $f'(a)$ par définition. Donc $\alpha = f'(a)$. De plus, le points $(a, f(a))$ est sur $\mathcal{T}$, donc $f(a) = f'(a)a + \beta$. Ainsi, $\beta = f(a) - f'(a)a$. Ainsi, $\mathcal{T}$ a pour équation $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

→ **Exercices** déterminer les équations des tangentes des exercices 13 et 15p193.

B Fonction dérivée

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un nombre dérivé en tout nombre a de I. On définit alors la fonction dérivée de f sur I, notée f', par :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

Proposition Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$

Preuve : En effet, la courbe représentative de f est une droite de coefficient directeur a, qui est sa propre tangente. Donc le coefficient directeur de la tangente en tout point de la courbe de f est le coefficient directeur de la droite représentant f, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$. □

Conséquence : soit $f(x) = k$ une fonction constante. Alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (La courbe de f est une droite horizontale, de coefficient directeur égal à 0)

Proposition Ci-dessous, un tableau de fonctions dont les dérivées sont à connaître :

fonction f	dérivable sur	dérivée f'
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

Proposition (Opérations sur les dérivées)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

– $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

– uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

– $\frac{1}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

– $\frac{u}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Conséquences : Soit k un nombre réel. La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$. La fonction u^2 est dérivable et $(u^2)' = 2u'u$

<u>**Exemple**</u> a. des 19 et 22 page 194

→ **Exercices** 19,20,21,22,24,25,... p194

C Signe de la dérivée et variation de la fonction

Activité 3p179 (conjecture)
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Proposition
- Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$;
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$;
- Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Ce qui nous intéresse le plus est la réciproque :

Théorème
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Dessin

On peut alors établir un tableau de variation de la fonction.

Exemple $f(x) = x^2$ (+lire 7p185 exercice résolu)
→ **Exercices** 43,45,48p196, 51,52p197 (tableaux, graphes)
→ **Exercices** 55,57,59p198 (dérivation et tableau de variation)