

# Chapitre 1

## Probabilités

### A Définition

**Définition** Soit  $E = \{x_1; \dots; x_n\}$  un ensemble. Une loi de probabilités sur  $E$  est la définition d'une fonction  $\mathbb{P}$  qui à chaque élément  $x_i$  associe le nombre  $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ , probabilité de  $x_i$ , tel que  $0 \leq p_i \leq 1$  et  $p_1 + \dots + p_n = 1$ .

Les éléments de  $E$  sont appelés **événements élémentaires**.

**Exemple** Une urne contient 5 boules : 2 vertes et 3 rouges. On tire une boule au hasard. l'ensemble  $E$  est  $\{v; r\}$ . On a  $\mathbb{P}(v) = \frac{2}{5}$  et  $\mathbb{P}(r) = \frac{3}{5}$ . On a bien  $\mathbb{P}(v) + \mathbb{P}(r) = 1$ . On décrit parfois la loi de probabilités dans un tableau.

$v$	$r$
0,6	0,4

**Définition** On dit que la loi est équirépartie si pour tout événement élémentaire  $x_i$  de l'ensemble  $E$  ayant  $n$  éléments,  $p_i = \frac{1}{n}$ . On dit alors que les événements (élémentaires) sont équiprobables.

**Exemple** C'est le cas d'un dé équilibré, ce n'est pas le cas de l'urne vue plus haut.  
→ **Exercices** 1,2,4,6 p102

### B Événement

**Définition** Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi de probabilité. Une partie de  $E$ , contenant plusieurs événements élémentaires, est appelé événement. La probabilité de  $A$ , notée  $\mathbb{P}(A)$ , est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

**Exemple** Si  $A = \{x_2; x_5; x_6\}$ , alors  $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_5 + p_6$ .

L'événement peut être décrit par une phrase. Pour un dé équilibré, la probabilité de l'événement  $A$  : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 » est :  $\mathbb{P}(A) = p_4 + p_5 + p_6 = \frac{3}{6}$ .

**Remarque** Une probabilité n'est jamais négative, et n'est jamais supérieure à 1.

**Proposition** Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité de tout événement  $A$  est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas total}}$$

**Exemple** on tire une carte au hasard dans un jeu standard de 32 cartes. Soit  $A$  n'événement « obtenir une reine ». Le choix de la carte se fait au « hasard », on suppose donc que la loi est équirépartie.

On a alors  $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{32}$  car il y a 4 reines et 32 cartes au total.

→ Exercices 1,11,12,14p102-3

## C Union et intersection

**Définition** Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $E$ .

- L'événement «  $A$  et  $B$  » est constitué des issues qui sont **à la fois** dans  $A$  et dans  $B$ . On le note  $A \cap B$  (c'est l'intersection de  $A$  et  $B$ ). Si cette intersection est vide, on dit que  $A$  et  $B$  sont **incompatibles**.
- L'événements «  $A$  ou  $B$  » est constitué des issues qui sont dans l'**un au moins** des événements  $A$  ou  $B$ . On le note  $A \cup B$  (c'est l'union de  $A$  et  $B$ ).

Dessin

**Définition** L'événement contraire de  $A$  est constitué des issues qui ne sont pas dans  $A$ . On le note  $\bar{A}$ .

**Exemple** Si l'expérience est le lancé d'une dé à 6 face,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Soit  $A$  l'événement « obtenir un nombre pair » et  $B$  l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 ». Alors

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{4, 5, 6\} \quad A \cap B = \{4, 6\} \quad A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \quad \bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

**Proposition** Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $E$ . Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Dans le cas où  $A$  et  $B$  sont incompatibles ( $A \cap B = \emptyset$ ) on a alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

**Proposition** Soit  $A$  un événement de  $E$ . Alors

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

→ **Exercices** 47,48,49p107 (compréhension de la description d'un événement)

→ **Exercices** 51,60,61,57,59p107-8

## D Représentations

### 1 Tableaux à double entrée

**Activité** 1Ap98

Dans le cas d'une loi équirépartie, et lorsque l'on s'intéresse à deux événements pouvant se croiser, on peut rassembler les données dans un tableau à double entrée pour aider à déterminer des probabilités.

**Exemple** exercice 16p103

→ **Exercices** 17,18p103, 19,21,22,23,25p104

### 2 Arbres

**Activité** (1Bp98 et) 2p99 (tirage avec ou sans remise)

Dans le cas d'une succession d'expériences aléatoires (plusieurs jets de dés), ou d'événements 'distincts' / 'indépendants', on peut utiliser une représentation en forme d'arbre des possibilités.

**Exemple** exercice 27p104

→ **Exercices** 28,29,31,33,34p105, 37p106

→ **Exercices** 35p105-6 (pondérer),40,41,42p106

→ **Exercices** 45,46p106-7 (arbres hauts avec branches se restreignant)