Chapitre 1

Limites

A Définitions et propriétés

Activité 1p209 (fonction carré et inverse)

Définition Dire qu'une quantité tend vers $+\infty$ signifie qu'elle devient infiniment grande, c'est à dire plus grande que n'importe quelle valeur donnée à l'avance.

Définition La notation $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se lit « la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$ ».
Elle signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pourvu que la valeur de x soit assez grande.

Proposition (Limites en l'infini) On admet les limites suivantes, suggérées par les représentations graphiques et les tableaux de valeurs :

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Dessins

Quand on parle de la limite de f en $+\infty$, on parle de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Celle-ci, si elle existe, peut être infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) ou être un nombre réel (pas nécessairement égal à 0).

→ **Exercices** (limites à l'infini ; à partir de graphiques) 1,2,3,4p220
→ **Exercices** (limites à l'infini ; à partir d'un tableau de valeurs) 5p220, 6,7,8,9,10p221 (pièges)

Proposition (Limites en un réel) La notation $\substack{x\to 0\\ x>0}$ signifie que x tend vers 0 tout en restant supérieur à 0.
On admet les limites suivantes, suggérées par les représentations graphiques et les tableaux de valeurs :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Ces limites sont des limites en 0, on parle de limite à droite ($x > 0$) et à gauche ($x < 0$) de 0. On peut aussi parler des limites en n'importe quel réel a, par exemple à droite de a ($\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$).
→ **Exercices** (limites en un réel ; à partir de graphiques) 11,12,13p221
→ **Exercices** (limites en un réel ; à partir d'un tableau de valeurs) 14,15p221, 16p222

B Opérations sur les limites

Activité 2p210 (somme et produit)
Refaire et apprendre les tableaux du livre page 212. Les résultats peuvent retrouver de manière intuitive. Il est important de connaître dans quels cas il y a une forme indéterminée.
Une forme indéterminée nécessite de modifier l'écriture de la fonction pour qu'il n'y ait plus de forme indéterminée.

Exemple (Fonctions polynomiales) On cherche à déteminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 4x + 3$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x + 3 = -\infty$, la forme est indéterminée. La manière de lever ce type d'indéterminée est de factoriser par la puissance de x la plus grande.
Ici, on a $x^2 - 4x + 3 = x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}) = 1 - 0 + 0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}) = +\infty$.
→ **Exercices** 17,18,19,20p22
→ **Exercices** 22,24,25p222

Exemple (Fonction rationnelle) étudier les limites de $f(x) = 2x + 4 - \dfrac{4}{x-5}$ en $\pm\infty$ et 5 en décomposant.

→ **Exercices** (limites à l'infini de fonctions rationnelles) 27,28,29,30p222
→ **Exercices** (limites en a de fonctions rationnelles) 33,34,35,37p223
→ **Exercices** (fonctions rationnelles) 38,39,41,45p223

C Asymptotes

Définition Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (en distinguant limite à gauche et limite à droite), on dit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Dessin

Définition Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = l$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Graphiquement, la courbe de f s'approche de la droite horizontale d'équation $y = l$ quand x prend de très grandes valeurs.

Dessin

Définition Soit a et b des réels. On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Autrement dit, la distance de la courbe de f à la droite tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Dessin

→ **Exercices** 49,50p224 (horizontale)
→ **Exercices** 58,59p225 (verticale)
→ **Exercices** 68,70p226 (oblique)