Chapitre 1

Suites

A Définitions et propriétés

Activité 234 (QCM)

Définition Une suite numérique u est une fonction pour laquelle la variable ne prend que des nombres entiers naturels. Ainsi, le plus souvent, le domaine de définition de u est $\mathbb{N}$. On utilise la notation en indice u_n pour $u(n)$, image par u de n.

Exemple On peut définir une suite par son terme général d'indice n.
Par exemple, soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 2$.

Exemple On peut définir une suite **par récurrence**, c'est à dire définir un terme à partir de termes précédents.
Par exemple, soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. La donnée d'un terme permet de calculer le suivant. Par exemple, $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$. Ensuite, $u_2 = 2u_1 + 2 = 2 \times 3 + 2 = 7$, etc...
→ **Exercices** 2,3,4,5p246

On peut représenter une suite à l'aide de points, les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Dessin de la suite $u_n = 3n + 2$

→ **Exercices** 10,11p246

Définition Soit u une suite. On dit que :
- u est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- u est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Pour déterminer la variation d'une suite u, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple variations de $u_n = \dfrac{n^2+1}{2}$ (croissante).
→ **Exercices** 13,14,16,17,18p247

B Suites arithmétiques

Définition Une suite arithmétique u de raison r est une suite qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute la raison r.

Exemple la suite définie par $u_n = 5n + 3$ est une suite arithmétique de raison 5. En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 3 - (5n+3) = 5n + 5 + 3 - 5n - 3 = 5$, donc $u_{n+1} = u_n + 5$.

Proposition Une suite u est arithmétique de raison r si et seulement si $u_n = r \times n + u_0$

Preuve : Admis. □

Remarque Autrement dit, une suite arithmétique est une fonction affine de la variable $n \in \mathbb{N}$, la raison de la suite étant le coefficient directeur. Par conséquent :

Proposition Soit u une suite aritmétique de raison r.
- Si $r > 0$, alors u est croissante.
- Si $r < 0$, alors u est décroissante.

Proposition Une égalité pratique pour certains calculs : Soit u une suite arithmétique de raison r. Pour $n \geq p$, on a

$$u_n = r(n-p) + u_p$$

Proposition Pour faire la somme de termes successifs d'une suite arithmétique, $S = u_p + \cdots + u_n$, on utilise la formule suivante :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Soit $S = (n-p+1)\dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Exemple Soit $S = 1+2+\cdots+n$. S est la somme d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1. On a $S = n \times \dfrac{1+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

→ **Exercices** 22,23,24,25,27p247

→ **Exercices** 29,30,31,33,36,37p248

C Suites géométriques

Définition Une suite géometique u de raison q est une suite qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute multiplie par la raison q.

Exemple la suite définie par $u_n = 3 \times 5^n$ est une suite géometique de raison 5. En effet, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \dfrac{3 \times 5^n \times 5}{3 \times 5^n} = 5$, donc $u_{n+1} = u_n \times 5$.

Proposition Une suite u est géometique de raison q si et seulement si $u_n = u_0 \times q^n$

Preuve : Admis. □

Proposition Soit u une suite géometique de raison $q > 0$ et de terme initial $u_0 > 0$.
- Si $q > 1$, alors u est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors u est décroissante.

Proposition Une égalité pratique pour certains calculs : Soit u une suite géometique de raison q. Pour $n \geq p$, on a

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Proposition Pour faire la somme de termes successifs d'une suite géométrique, $S = u_p + \cdots + u_n$, on utilise la formule suivante :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Soit $S = u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

Exemple Soit $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$. S est la somme d'une suite géometique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 1. On a $S = 1 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}) = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

→ **Exercices** 50,51,52,54,55,56p249
→ **Exercices** 59,61,62,65p250

→ **Exercices** 71p250,73,74p251 (en « situation » - cas pratiques)