

Devoir maison n°7  
Donné le 24/11/2009 – à rendre le 01/12/2009

**Exercice 1** Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge. Répondre, en expliquant, aux questions suivantes :

- À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.  
Est-il cosmonaute américain ?
- À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.  
Est-il cosmonaute américain ?
- Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.  
Porte-t-il une chemise rouge ?
- Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.  
Porte-t-il une chemise rouge ?

**Exercice 2** Les réponses devront bien sûr être justifiées.

A Voici deux propositions où  $a$  et  $b$  désignent des nombres réels :

$$\mathcal{P}_1 : (a + b)^2 = 0 \quad \mathcal{P}_2 : a = 0 \text{ et } b = 0$$

Si  $a$  et  $b$  sont des nombres réels tels que  $\mathcal{P}_2$  est vraie, alors  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Ainsi pour  $a$  et  $b$  réels, la proposition  $\mathcal{P}_2$  implique la proposition  $\mathcal{P}_1$ , ce que l'on note  $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$ .

Est-il vrai que pour  $a$  et  $b$  réels,  $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$  ?

B Voici quelques propositions où  $a$  et  $b$  désignent des nombres réels :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}_1 : a^2 = b^2 & \mathcal{P}_2 : a = b & \mathcal{P}_3 : a = -b \\ \mathcal{P}_4 : (a + b)(a - b) = 0 & \mathcal{P}_5 : a = b \text{ ou } a = -b & \mathcal{P}_6 : a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{array}$$

- Quelles sont les implications du type  $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_{\dots}$ , vraies pour  $a$  et  $b$  réels ?
- Quelles sont les implications du type  $\mathcal{P}_{\dots} \Rightarrow \mathcal{P}_1$ , vraies pour  $a$  et  $b$  réels ?
- Quelles sont les propositions équivalentes pour  $a$  et  $b$  réels ?  
( $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes si  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ )
- Application : résoudre l'équation  $(2x - 3)^2 = (2x + 9)^2$  sans calculer de discriminant.
- Vérification : résoudre l'équation précédente par une autre méthode.

**Exercice 3** Pour tout réel  $m$  on définit la fonction polynomiale  $f_m(x) = (m-1)x^2 + (m-1)x + (m-4)$ .

- Pour quelles valeurs de  $m$   $f_m$  est une fonction polynomiale de degré 2 ?
- Déterminer les racines de la fonction  $f_1$ .
- Déterminer les racines de la fonction  $f_2$ .
- Déterminer en fonction de  $m$  le nombre et l'expression des racines de  $f_m$ .  
Aide : chercher le signe du discriminant (en fonction de  $m$ ).